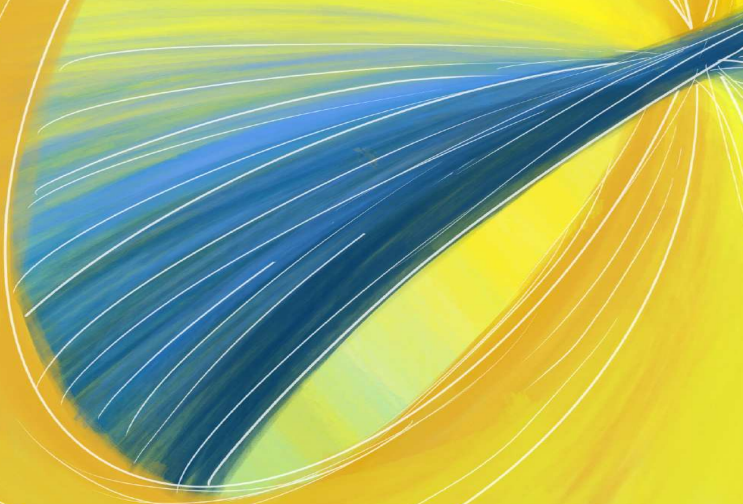
Topologia e geometria de 3-variedades

Uma agradável introdução



André Salles de Carvalho
Rafał Marian Siejakowski

impa

33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Topologia e geometria de 3-variedades

Uma agradável introdução

Topologia e geometria de 3-variedades, uma agradável introdução
Primeira impressão, julho de 2021
Copyright © 2021 André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski.
Publicado no Brasil / Published in Brazil.

ISBN 978-65-89124-51-1
MSC (2020) Primary: 57K30, Secondary: 53A35, 53A04, 57K32, 57K35

Coordenação Geral Carolina Araujo

Produção Books in Bytes **Capa** Izabella Freitas & Jack Salvador

Realização da Editora do IMPA
IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ

www.impa.br
editora@impa.br

Sumário

Prefácio **1**

1 Como entender as esferas **7**
1.1 A definição das esferas e como pensá-las 8
1.2 Compactificação por um ponto 9
1.3 Projeções e inversões 12
1.3.1 Projeções estereográficas em dimensão 1 12
1.3.2 Inversões em dimensão 2 13
1.3.3 Uma projeção estereográfica importante 18
1.3.4 Projeção estereográfica e compactificação 19
1.3.5 Os números complexos 20
1.3.6 Transformações lineares fracionárias 22
1.3.7 Transformações lineares fracionárias e geometria 24
1.3.8 Rotações e projeção estereográfica em dimensão 1 28
1.4 Projeções e inversões em dimensões maiores 28
1.4.1 Inversões em dimensão qualquer 30
1.4.2 Projeções estereográficas em dimensão qualquer 35
1.4.3 Rotações e projeção estereográfica em dimensão 2 36

2 Quatérnios e a 3-esfera **41**
2.1 Definição matricial de números complexos 41
2.2 Definições de quatérnios 44
2.2.1 A definição matricial 45

2.2.2 A definição mais corriqueira 46
2.2.3 Propriedades dos quatérnios 47
2.3 Os quatérnios e a 3-esfera 50
2.3.1 A 3-esfera como um grupo 50
2.3.2 A 3-esfera como união de círculos 54
2.3.3 Decomposição da 3-esfera em toros e círculos 58
2.3.4 A decomposição da 3-esfera em dois toros sólidos 64
2.4 A 3-esfera como um grupo de Lie 66
2.4.1 A aplicação exponencial 72
2.4.2 A simetria da 3-esfera 77
2.4.3 O que acontece em outras dimensões? 84
2.5 O espaço das órbitas do fluxo de Hopf 86

3 Variedades, colagens e quocientes **91**
3.1 Exemplos e construções 92
3.1.1 Toros e outras superfícies 92
3.1.2 Decomposições e quocientes 94
3.1.3 Exemplos em dimensão 3 99
3.1.4 Exemplos de quocientes pela ação de grupos 107
3.1.5 Decomposições ou ações? 111
3.2 Variedades 114
3.2.1 Pseudogrupos e variedades 114
3.2.2 Folheações 120
3.2.3 Outros exemplos curiosos 122
3.2.4 O fibrado tangente 126
3.3 Construções de variedades 134
3.3.1 Simplexos, poliedros e colagens 135
3.3.2 Colagens e o número de Euler 139
3.3.3 Colagens e 3-variedades 142
3.3.4 Quocientes por ações de grupos 151

4 Geometria tridimensional **163**
4.1 Variedades riemannianas e suas isometrias 166
4.1.1 Isometrias da geometria euclidiana 168
4.2 Geometria da 3-esfera 173
4.2.1 Distância riemanniana 176
4.2.2 Isometrias das esferas 180

4.3 Descrição intrínseca da geometria esférica 182
4.3.1 Geodésicas na esfera 183
4.3.2 Geometria esférica sintética 190
4.4 Variedades geométricas 194
4.4.1 Exemplo euclidiano – o 3-toro 195
4.4.2 Colagem geométrica 200
4.5 Colagens esféricas 202
4.5.1 Espaços lenticulares 203
4.5.2 O espaço dodecaédrico de Poincaré 207
4.6 Geometria hiperbólica 213
4.6.1 A bola de Poincaré 215
4.6.2 Isometrias hiperbólicas e transformações conformes da esfera 222
4.7 Variedades hiperbólicas 227
4.7.1 O espaço dodecaédrico de Seifert–Weber 227
4.7.2 O complemento do nó figura oito 230

Bibliografia **234**

Índice Remissivo **236**

Prefácio

No passado distante, humanos achavam que a Terra era plana e isso durou, de uma forma ou outra, pelo menos, até a Idade Média. Aos poucos, a humanidade foi se apropriando do fato de que estávamos em um planeta esférico, que deveria, portanto, ser chamado de uma *esfereta*. Independentemente do nome que damos a ela, o que é importante pontuar aqui é que, do ponto de vista de um ser das dimensões de um mamífero superior como um homem ou um mamute, a Terra parece plana e não haveria qualquer vantagem prática em sabê-la esférica. Para navegantes, por outro lado, que percorrem distâncias enormes, é fundamental saber que a Terra é esférica.

Apesar de tudo o que aconteceu desde os egípcios, gregos e romanos; de Dante Alighieri, Leonardo da Vinci, Michelangelo e do Renascimento; das Revoluções Científica, Francesa, Industrial e Russa; de Shakespeare, Bach, Camões, Napoleão, Beethoven, Gauss e Einstein; nós, humanos, ainda não sabemos a forma do nosso Universo. Que não saibamos se há ou não outros universos, talvez paralelos ao nosso, é provavelmente irrelevante. Porém, que saibamos pouco mais sobre a forma do nosso Universo do que qualquer mamute sabia sobre a forma da Terra, quando na Terra havia mamutes, talvez seja uma lição de humildade que todos devamos ter em mente, se não constantemente (talvez seja deprimente se comparar com mamutes diariamente), ao menos em momentos difíceis ou especialmente filosóficos da vida.

O objetivo destas notas não é infelizmente revelar a forma do universo: é discuti-la. Mais precisamente, o que fazemos aqui é desenvolver técnicas matemáticas para analisar espaços tridimensionais e usá-las para estudar espaços específicos de forma a ajudar o leitor a entender o que é "entender" um espaço tridimensional. Boa parte do texto é dedicada à 3-esfera, um dos espaços tridimensionais mais simples e, ainda assim, fascinante, que apresenta diversas características surpreendentes para nossa intuição "euclidiana". Entender bem a 3-esfera pode ser

considerado o fio condutor destas notas, mas não deixamos de observar a paisagem e a vista de lugares interessantes por onde passamos ao longo da viagem.

Como exercício intelectual preliminar, propomos que a leitora se ponha no lugar de uma mulher das cavernas, especialmente inteligente e longeva, a quem ocorre, depois de muito viajar, das savanas da África, pelo Oriente Médio, Índia, Indonésia até chegar à Austrália, depois de ter observado com atenção o céu de todos esses lugares, que talvez a terra "não tenha fim", isto é, que seja sempre possível continuar a caminhar, em qualquer direção, sem jamais chegar ao "fim do mundo" em uma borda da qual se cai no vazio. Durante a jornada, nossa personagem teve tempo para desenvolver instrumentos de navegação e decide fazer um experimento: fazer uma viagem sempre em direção ao sul e ver o que acontece. Ela sai de Perth, na Austrália, passa muito tempo no mar, chega a um lugar onde passa muito frio até chegar a um ponto onde seus instrumentos ficam confusos, mas vai em frente, agora na direção norte; vê pinguins tomando chimarrão, anda bastante, passa por um deserto sequíssimo, depois por uma floresta luxuriante, atravessa um canal, sente a terra tremer sob seus pés, vê árvores gigantes, até começar a sentir frio de novo e novamente chegar a outra parte muito fria, que desorienta seus instrumentos. Segue em frente e começa a andar para o sul, vê ursos fofinhos e mamutes, até começar a ver cangurus novamente e chegar de volta a Perth. Sendo uma pessoa prevenida, muito hábil e tendo tido um sonho, na véspera da viagem, com uma mulher chamada Ariadne, ela havia levado um grande rolo de fio vermelho que ia desenrolando por onde passava. Quando chegou de volta a Perth, amarrou a ponta final do fio vermelho ao mesmo tronco de árvore em que tinha amarrado a ponta inicial ao sair de casa. Como tinha um espírito indômito e gostava de viajar, resolveu fazer outra viagem. Mas não gostava de passar frio e não tinha mais fio vermelho, de modo que, tentando evitar aquelas paragens desagradáveis da viagem anterior, partiu dessa vez para oeste desenrolando um fio azul. Muito viajou, não passou frio, passou por cima do fio vermelho em Santiago, no Chile, e voltou a Perth feliz da vida. Isso a fez concluir que a Terra era algo semelhante a um círculo, só que bidimensional. No círculo, em qualquer direção que se ande (há duas escolhas), sempre voltamos ao ponto inicial. No "hipercírculo" bidimensional o mesmo acontece e, embora tenhamos muitas escolhas de direções a explorar, sempre voltamos ao ponto onde começamos (sem tropeçar na borda e cair no vazio) e sempre cruzamos exatamente uma vez qualquer outro caminho que tenhamos percorrido em viagens pregressas.

Por uma dessas coincidências difíceis de explicar – a menos que pensemos em escalas de tempo muito grandes – exatamente no mesmo instante quando nossa personagem estava saindo de Perth pela primeira vez, uma alienígena das caver-

nas em um mundo distante, igualmente inteligente, hábil e indômita, estava, ela mesma, fazendo exatamente o mesmo, com o mesmo intuito. Embora os nomes de países e cidades nesse outro mundo sejam impronunciáveis, tudo aconteceu exatamente como na Terra. Bem, quase tudo: a única diferença, sutil, foi que a alienígena não reencontrou o fio vermelho durante a viagem azul. Ela concluiu que seu mundo, de fato, não tinha fim, como o círculo, mas sua analogia parou aí. Fez, então, uma viagem no sentido sudoeste desenrolando um fio branco e, mais uma vez, só reencontrou os fios vermelho e azul ao voltar pra casa, onde os tinha amarrado no início das viagens anteriores. A essa altura, já um pouco cansada, mandou suas quatro filhas em quatro direções diferentes e todas voltaram pra casa tendo encontrado exatamente um dos fios vermelho, azul ou branco, exatamente uma vez. Ao mandar as filhas viajarem, a alienígena queria, além de descansar, ter tempo para pensar e considerar o problema de um ponto de vista um pouco diferente: ao invés de se perguntar a forma do seu mundo, adotou uma atitude mais elucubrativa e começou a perguntar-se quais seriam todas as *possíveis* formas de mundos universo afora.

O assunto destas notas são os desenvolvimentos de caráter matemático relacionados a essa mesma pergunta, mas em dimensão três: quais são os possíveis "universos tridimensionais" e quais são suas propriedades? Se vivêssemos em um desses universos, como ele pareceria "de dentro"? Para dar o primeiro passo nessa direção, podemos começar pensando nos mundos bidimensionais que "se fecham sobre si mesmos", chamados por matemáticos de *superfícies compactas*. A mais simples entre superfícies é o "hipercírculo", que rebatizamos como *esfera*. Por analogia, deveria existir uma "hiperesfera", que matemáticos chamam de 3-*esfera* e, como não há razão alguma para pararmos, podemos definir *n-esferas* em geral. Porém, uma pessoa "normal" – o que também inclui muitos matemáticos – não sabe imaginar a 3-esfera, que não pode ser desenhada da perspectiva de um observador externo. Nesse sentido, um dos principais objetivos deste livro é fazer com que o leitor deixe de ser normal e desenvolva uma capacidade de descrever, com precisão igual àquela de uma testemunha ocular, como seria viver e voar em um universo como a 3-esfera. Do mesmo modo, olhando para a segunda superfície compacta da lista, a superfície do mundo da exploradora alienígena, que chamamos de *toro*, podemos imaginar um espaço tridimensional análogo – um "hipertoro", que chamaremos de 3-toro, a ser discutido nos Capítulos 3 e 4. Com um pouco de engenho e criatividade, é possível construir vários outros exemplos de 3-variedades compactas – espaços tridimensionais que se fecham sobre si mesmos – o que nos leva à próxima pergunta natural sobre o assunto: como "organizar" as 3-variedades?

Vale a pena pensar sobre como matemáticos organizam seus objetos de estudo, mas falemos aqui de um caso concreto, muito pertinente à presente discussão. Desde o início do século XX, sabe-se como classificar as superfícies compactas e essa classificação é razoavelmente simples: é possível separá-las em dois tipos – as *orientáveis* e as *não orientáveis* – e fazer uma lista ordenada das superfícies de cada tipo. São listas infinitas, é verdade, mas, enquanto classificação, essa só não é mais simples que uma lista finita. A ordenação dentro de cada lista é feita por um invariante topológico chamado *característica de Euler*, que definimos no Capítulo 3. Poderíamos (deveríamos, aliás) nos fazer as seguintes perguntas ao passarmos para o mundo das 3-variedades: É possível classificar 3-variedades compactas? Se sim, seria razoável esperar que essa classificação fosse por meio de uma lista? Ou um número finito de listas? Ou uma lista infinita de listas talvez? Podemos obter uma classificação topológica usando invariantes (topológicos) que conseguimos calcular? Seria essa a melhor estratégia ou deveríamos considerar outras maneiras de tentar classificá-las?

A história do estudo sistemático das 3-variedades começa com Henri Poincaré, na virada dos séculos XIX para o XX, em seis artigos, o primeiro chamado *Analysis Situs* e os seguintes chamados de "complementos". Neles Poincaré introduziu vários conceitos e técnicas que formaram a base da área da matemática que hoje chamamos de topologia. Nesses complementos, ele formulou (no segundo, e reformulou no quinto) a pergunta que posteriormente se tornaria conhecida como *Conjectura de Poincaré*. Vários matemáticos fizeram importantes contribuições para a compreensão de 3-variedades ao longo do século XX, até que William Thurston enunciou, no final dos anos 1970, a chamada *Conjectura de Geometrização*, que contém a Conjectura de Poincaré como um caso particular, propondo uma forma de organizar o conjunto de todas as 3-variedades, usando não apenas sua topologia, mas também geometrias superimpostas sobre a "base" topológica. A Conjectura de Geometrização foi demonstrada quase exatos 100 anos após o trabalho pioneiro de Poincaré, nos primeiros anos do século XXI, por Grigori Perelman.

Não entraremos aqui em maiores detalhes sobre essas conjecturas e teoremas, o que exigiria o uso de muitas palavras "difíceis". Ao longo do texto, discutiremos vários desses assuntos, mas continuaremos a evitar muitos outros por serem mais avançados do que seria razoável incluir em notas que se propõem realmente – e não apenas no título – introdutórias. Discutiremos aspectos topológicos, mas não falaremos de grupos de homologia e homotopia, por exemplo. Também introduziremos geometrias em 3-variedades, não apenas porque ajudam muito nossa intuição visual e espacial sobre elas, mas também porque estão intimamente relacionadas à sua topologia. Desse modo, traremos a leitora mais próxima de ser

capaz de entender as Conjecturas de Poincaré e de Geometrização e até, futuramente, suas demonstrações.

Há dois livros excelentes – excepcionais, na verdade – que forneceram inspiração e muita informação que usamos para escrever as nossas notas. O primeiro é um livro "elementar": *The Shape of Space*, de Jeffrey Weeks (2002). O segundo é, ao contrário, um livro bastante avançado: *Three-Dimensional Geometry and Topology*, de Bill Thurston (1997). O primeiro o leitor pode ler a qualquer momento e recomendamos entusiasmadamente que o faça. O segundo requer maior maturidade matemática que, esperamos, será adquirida, ao menos em parte, lendo o que escrevemos aqui. Após fazê-lo, também recomendamos, igualmente entusiasmadamente, que a leitora o consulte.

Como usar este livro

É importante esclarecermos, logo no início, o que se pode e o que não se deve esperar dessas notas. Elas foram escritas como um grande "estudo dirigido", isto é, ao contrário do que acontece com a maioria (a quase totalidade, talvez) dos livros de matemática que o leitor conhece, elas devem ser lidas mais ou menos como um romance, da primeira página à última, em ordem. Ao contrário dos romances, no entanto, há um sem número de exercícios cujo objetivo é fazer a leitora entender o que está sendo dito a cada passo. A grande maioria dos resultados que seriam costumeiramente chamados de lemas, proposições e corolários, aqui são chamados de exercícios. Esperamos que isso não torne o livro de difícil leitura, apenas de leitura um pouco mais trabalhosa do que livros tradicionais: os exercícios são, em sua maioria, de simples resolução e acompanham o desenvolvimento do que teria sido uma aula detalhada sobre os assuntos discutidos. Muitas vezes isso terá, também esperamos, a vantagem de deixar para o leitor o trabalho e o prazer de realizar "o pulo do gato", que nos faz verdadeiramente entender matemática. A desvantagem é que talvez as notas não sejam muito boas como obra de referência. Entretanto, mesmo chamá-la de "obra" está muito distante do que ambicionamos, e esperamos que cumpram satisfatoriamente o papel de tornar melhor conhecido esse assunto fascinante, que nos parece, no Brasil pelo menos, menos popular do que mereceria.

Pré-requisitos

Estas notas são destinadas a todo público matemático, incluindo estudantes de graduação, portanto não têm muitos pré-requisitos absolutos. Esperamos, no entanto,

que a leitora tenha alguma familiaridade com as noções básicas de topologia: espaços topológicos, homeomorfismos, espaços métricos. Vamos também usar alguma teoria de grupos e algum cálculo em várias variáveis reais, além de mencionar análise complexa poucas vezes.

Estrutura do livro

Há quatro capítulos, como não poderia deixar de ser, com dificuldades aproximadamente crescentes. No Capítulo 1, introduzimos as esferas, de qualquer dimensão, e discutimos inversões e projeção estereográfica. Embora introdutório, esse capítulo revela muitas propriedades fascinantes das esferas e da geometria de inversões – transformações que preservam ângulos, mas não distâncias. No Capítulo 2, falamos principalmente da 3-esfera, centrando nossa atenção na álgebra dos quatérnios e nas estruturas adicionais que a 3-esfera adquire do grupo dos quatérnios unitários – em particular, discutimos em detalhe a fibração de Hopf, que decompõe a 3-esfera em uma união de círculos. No Capítulo 3, introduzimos o conceito de n-variedades – espaços que "são" localmente como o espaço $\mathbb{R}^n$, mostrando vários exemplos e maneiras de construir variedades em geral, e 3-variedades em particular. No Capítulo 4, falamos de três geometrias diferentes em espaços tridimensionais: geometria euclidiana, esférica e hiperbólica. Mostramos também alguns exemplos de 3-variedades com essas geometrias.

Agradecimentos

Agradecemos os vários comentários, correções e sugestões feitos pelos participantes de um curso de introdução às 3-variedades que estamos ministrando no primeiro semestre de 2021 no IME-USP. Agradecemos especialmente à Luciana Menezes Vasconcelos, que leu cuidadosamente os dois primeiros capítulos antes de começarmos o curso.

Se leitores quiserem enviar comentários, correções e sugestões, ficaremos também muito gratos. Enviem-nos, por favor, para

`andre@ime.usp.br` ou `rafal@ime.usp.br`.

Durante a preparação destas notas, Rafał M. Siejakowski recebeu o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo Nº 2018/12483-0. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade dos autores e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

1 Como entender as esferas

A geometria elementar, que todos estudamos na escola, trata, na sua maior parte, de objetos "retos": linhas retas no plano e planos dentro do espaço euclidiano tridimensional. Usando esses objetos primitivos, podemos construir outras formas geométricas, como polígonos e poliedros. Os objetos "redondos", que mais raramente ocorrem na educação escolar, são principalmente as esferas: o círculo (a 1-esfera) e a 2-esfera, chamada simplesmente de "esfera". Como é claro, o resto das formas geométricas redondas que encontramos na escola, como cones e cilindros, também devem a sua "redondeza" ao círculo.

Neste capítulo, vamos desenvolver uma abordagem um pouco diferente da geometria, pois vamos considerar as formas redondas – as esferas – como os objetos mais fundamentais. Pensemos primeiro em um círculo no plano e imaginemos que o seu raio aumenta para infinito. Para raios muito grandes, é praticamente impossível distingui-lo de uma linha reta. Analogamente, uma esfera de raio gigantesco é quase um plano, como a superfície da Terra parecia aos mamutes do pleistoceno. Desse modo, podemos tratar linhas retas como limites de enormes círculos, e planos de enormes esferas.

A cada reta no plano euclidiano corresponde uma *reflexão* – uma transformação isométrica do plano que fixa a reta e que leva o semiplano de um lado ao semiplano do outro e vice versa. Analogamente, cada plano no espaço tridimensional

determina uma reflexão, que preserva o plano e que intercambia seus dois lados – os dois semiespaços – como uma reflexão em um espelho infinito. Um dos principais objetivos deste capítulo é definir e estudar "reflexões" em círculos e esferas – chamadas de *inversões* – que têm muitas propriedades similares àquelas das reflexões tradicionais. Por exemplo, a inversão em uma esfera fixa os pontos da esfera e troca as partes de dentro e fora da esfera, embora não fique claro dessa descrição aonde uma tal transformação deveria levar o centro da esfera. Para responder essa e várias outras perguntas, convidamos agora o leitor para uma excursão pelo mundo fascinante da geometria inversiva de objetos redondos.

1.1 A definição das esferas e como pensá-las

A maneira mais comum de definir a *esfera*, nossa velha conhecida, é como a superfície de uma bola no espaço. Bolas e, claro, suas superfícies, são algo com que seres humanos têm contato desde a infância. A esfera a que nos referimos é a esfera bidimensional, e o espaço é o *nosso espaço* de três dimensões, a que matemáticos frequentemente se referem como o $\mathbb{R}^3$. Nós humanos também não temos nenhum problema para entender círculos nem, talvez com um pouco mais de esforço, de compará-los com a esfera e pensá-los como esferas em um mundo plano, onde há apenas duas dimensões. Indo na direção oposta, tendo pensado no plano como $\mathbb{R}^2$ e no espaço como $\mathbb{R}^3$, podemos abstrair a ideia de espaços e suas dimensões e, então, considerar espaços de dimensão n e esferas dentro deles. O que mais nos interessa neste capítulo são esferas tridimensionais, em particular a *esfera unitária tridimensional*, definida como o seguinte subconjunto do espaço $\mathbb{R}^4$:

Definição 1.1.1. A 3-*esfera* S^3 é o subconjunto de pontos em $\mathbb{R}^4$ que ficam a distância 1 da origem, isto é,

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}. \tag{1.1.1}$$

Essa definição é simples e perfeitamente satisfatória do ponto de vista abstrato, mas ao dizer isso estamos afirmando tacitamente que nos conformamos em entender a esfera tridimensional tão bem (ou tão mal) quanto entendemos a esfera de dimensão 236: é algo razoável do ponto de vista abstrato, mas abrimos mão de dizer qualquer coisa além disso. Nós somos, no entanto, seres tridimensionais e poderíamos nos permitir maior ambição e esperar sermos capazes de entender a 3-esfera melhor que isso. É assim que vamos proceder.

Tentar imaginar a 3-esfera como ela aparece a um observador externo, como se fosse um objeto nas nossas mãos como fazemos com a esfera 2-esfera, não é algo que devamos tentar para começar: a maioria de nós não tem qualquer prática em considerar objetos no espaço de dimensão 4. O que podemos, sim, fazer é tentar "colocar" S^3 dentro do nosso espaço $\mathbb{R}^3$ e esperar sermos assim capazes de visualizá-la. Uma tal representação, no entanto, não seria fiel já que estaríamos vendo uma imagem distorcida, de algo introduzido a contragosto no $\mathbb{R}^3$. Além disso, ao colocarmos um espaço tridimensional dentro de outro acabamos sendo obrigados a ocupar "todo o espaço ambiente" e não sobra "de onde olhar." Mas isso nos permite, pelo menos, observar como tais representações distorcem objetos que conhecemos, por exemplo, círculos, retas, planos, esferas, entre outros. Além disso, podemos ainda mover tais objetos dentro da 3-esfera e observar como suas imagens se movem dentro de $\mathbb{R}^3$. É isso o que começaremos a fazer neste capítulo: introduziremos a projeção estereográfica e entenderemos como ela distorce objetos e movimentos rígidos das esferas. Esta será uma experiência valiosa em nosso caminho para uma compreensão mais profunda do que é, de fato, a 3-esfera e servirá também como guia de como proceder para entender 3-variedades em geral.

Há outras abordagens a serem exploradas com o mesmo objetivo. Uma delas é imaginar o que veríamos se vivêssemos dentro de uma 3-esfera. Esta segunda estratégia é mais intuitiva, já que apela à nossa experiência senciente tridimensional e voltaremos a esse assunto mais à frente. O que é importante mencionar logo é que não há uma *melhor* forma de entender a 3-esfera. Ao contrário, é muito útil ter várias formas de pensá-la e várias perspectivas diferentes para nos assenhorarmos de seus diferentes aspectos geométricos, topológicos, algébricos, entre outros.

1.2 A esfera como compactificação por um ponto do espaço

Vamos começar nos afastando um pouco da discussão de visualização acima e introduzir uma forma útil de descrever esferas do ponto de vista topológico. Assim, a primeira forma que mencionamos de pensar qualquer esfera S^n é como o espaço obtido adicionando-se um *ponto no infinito* ao espaço $\mathbb{R}^n$. Do ponto de vista topológico, isso é equivalente a tomar uma bola n-dimensional e colapsar a um único ponto o seu bordo: veja a Figura 1.2.1. Usando símbolos, se D^n denota a bola fechada unitária em $\mathbb{R}^n$,

$$D^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\},$$

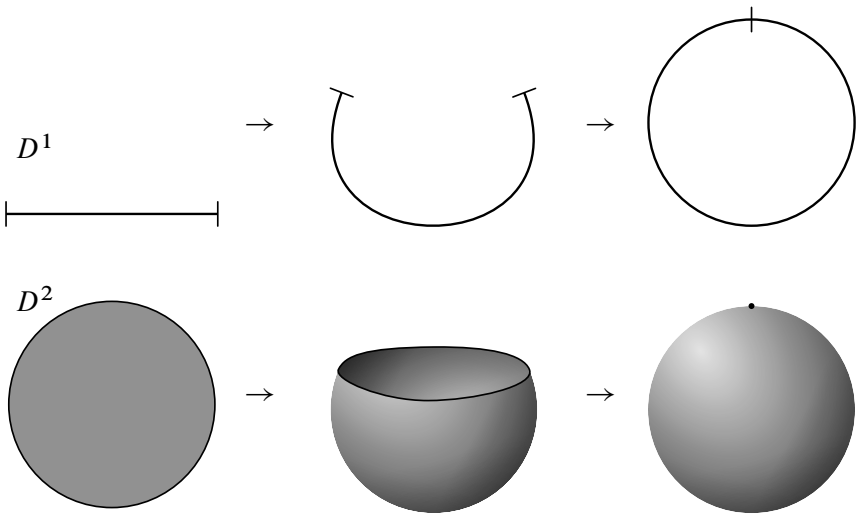


Figura 1.2.1: **Acima:** Para obter o círculo S^1 a partir de um intervalo, basta identificar seu bordo, que consiste de dois pontos, em um único ponto. **Abaixo:** De modo similar, a esfera S^2 é o resultado da contração do todo o bordo de um disco D^2 a um só ponto.

estamos afirmando que a esfera n-dimensional S^n, cuja definição oficial é

$$S^n = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}, \quad (1.2.1)$$

"é" o espaço quociente $D^n/\partial D^n$, obtido da bola D^n pela relação de equivalência cuja única classe não trivial é todo o seu bordo ∂D^n. Note que esse bordo é a esfera S^{n-1}:

$$\partial D^n = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}. \quad (1.2.2)$$

Qualquer leitora não matemática acharia, a esta altura, que somos loucos ou, no mínimo, muito confusos: a n-esfera, afinal, é dada pela Equação (1.2.1) ou é D^n/S^{n-1}. O que exatamente, então, queríamos dizer usando o verbo "ser" entre aspas acima? Uma maneira de formalizar topologicamente essa descrição é pela *compactificação por um ponto* de um espaço topológico.[1]

[1] Se o leitor não estiver interessado nas generalidades sobre espaços topológicos que mencionamos brevemente aqui, pode pensar, sem prejuízo, em $\mathbb{R}^n$ com seus conjuntos abertos, isto é, conjuntos $U \in \mathbb{R}^n$ cujos pontos têm pequenas bolinhas inteiramente contidas em U.

Uma *topologia* em um conjunto X é uma coleção $\mathcal{O}$ de subconjuntos de X, chamados de subconjuntos *abertos*, com as três seguintes propriedades:

(i) O conjunto vazio $\varnothing$ e o conjunto todo X ambos pertencem a $\mathcal{O}$.

(ii) Uniões quaisquer (finitas ou infinitas, enumeráveis ou não) de conjuntos de $\mathcal{O}$ estão em $\mathcal{O}$.

(iii) Interseções finitas de conjuntos de $\mathcal{O}$ estão em $\mathcal{O}$.

Um conjunto X com uma topologia $\mathcal{O}$ é um *espaço topológico*. Um conjunto em um espaço topológico é *fechado* se seu complementar é aberto, isto é, se seu complementar é um conjunto de $\mathcal{O}$; o *fecho* de um conjunto A é a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm A. Um espaço topológico é dito *Hausdorff* se, para quaisquer dois pontos $a \neq b$ em X, existem abertos disjuntos A, B tais que $a \in A$ e $b \in B$.

Seja X um espaço topológico Hausdorff, localmente compacto (isto é, no qual todo ponto tem uma vizinhança cujo fecho é compacto), mas não compacto. O exemplo típico é o $\mathbb{R}^n$, onde n é um natural (finito). A *compactificação por um ponto* de X é um espaço topológico denotado por $\widehat{X}$. Como conjunto, $\widehat{X}$ é a união disjunta de X com um ponto adicional, denotado, sugestivamente, por ∞: $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$. Os conjuntos abertos de $\widehat{X}$ são de dois tipos: abertos de X ou conjuntos da forma $K^{\mathrm{c}} \cup \{\infty\}$, onde K é compacto em X e $K^{\mathrm{c}} = X \setminus K$ é o complementar de K em X.

Exercícios 1.2.1. a) Mostre que a coleção de subconjuntos de $\hat{X}$ descritos acima é, de fato, uma topologia.

b) Mostre que $\hat{X}$ é Hausdorff se X o é.

c) Como definido acima, um espaço é *localmente compacto* se todo ponto está contido em um aberto cujo fecho é compacto. Entenda por que é necessária a hipótese de compacidade local na definição de compactificação por um ponto e mostre que $\hat{X}$ é compacto.

Se X, Y são espaços topológicos, uma transformação $f : X \to Y$ é *contínua* se imagens inversas de abertos (de Y) são abertos (de X). Um *homeomorfismo* entre X e Y é uma transformação $f : X \to Y$ contínua e inversível, cuja inversa é continua. Quando discutimos espaços topológicos, comumente identificamos espaços homeomorfos. É nesse sentido que dizemos que a n-esfera S^n "é" a compactificação por um ponto de $\mathbb{R}^n$: S^n e $\widehat{\mathbb{R}^n}$ são espaços homeomorfos.

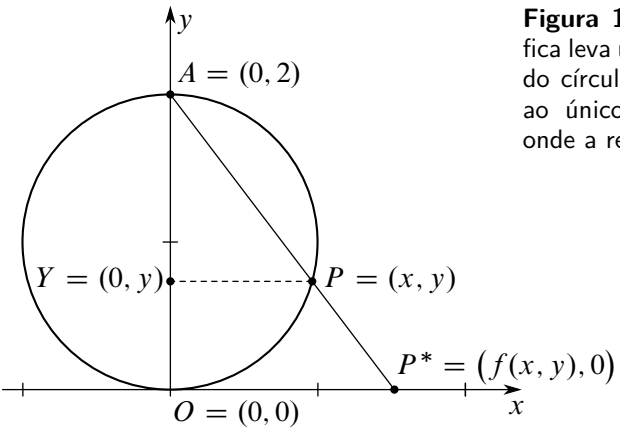


Figura 1.3.1: A projeção estereográfica leva um ponto $P = (x, y) \neq (0, 2)$ do círculo unitário centrado em $(0, 1)$ ao único ponto $P^* = \big(f(x, y), 0\big)$ onde a reta AP cruza o eixo x.

Exercício 1.2.2. Mesmo que você não consiga (ou não queira gastar muito tempo tentando) provar a afirmação acima, pense um pouco sobre qual o caminho a ser seguido.

Como veremos a partir de agora, esse exercício é elegantemente formalizado e resolvido usando a *projeção estereográfica* que definiremos e estudaremos nas seções a seguir.

1.3 Projeções estereográficas em dimensão 1 e inversões em dimensão 2

1.3.1 Projeções estereográficas em dimensão 1

Começamos definindo a *projeção estereográfica* que leva o círculo unitário em $\mathbb{R}^2$ centrado em $(0, 1)$ ao eixo horizontal, como mostra a Figura 1.3.1. A similaridade entre os triângulos AYP e AOP^* implica que a fórmula é

$$f(x, y) = \frac{2x}{2 - y}. \tag{1.3.1}$$

Algumas observações são importantes neste momento. Poderíamos escrever fórmulas análogas a (1.3.1), mas possivelmente mais complicadas, de forma a levar qualquer círculo no plano em uma reta tangente a ele.

Exercício 1.3.1. Encontre a fórmula da projeção estereográfica que leva o círculo de raio $\frac{1}{2}$ centrado no ponto $(0, -\frac{1}{2})$ sobre a reta horizontal que passa pelo pelo

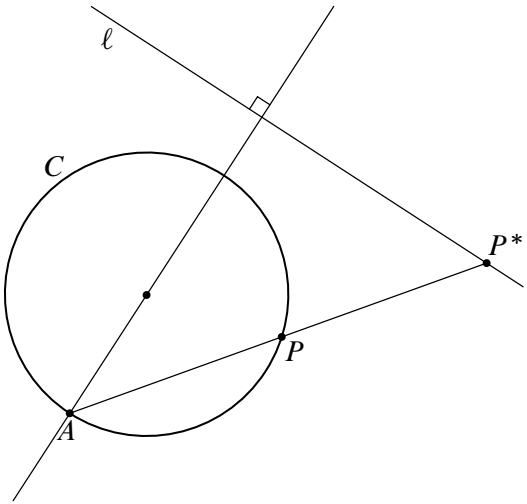


Figura 1.3.2: Mesmo sem um sistema de coordenadas, pode-se definir a projeção estereográfica de qualquer círculo C sobre qualquer reta ℓ.

ponto $(0, -1)$. Volte a este exercício mais tarde e entenda por que o colocamos aqui.

Podemos também fazer projeção estereográfica de um círculo C a partir de um ponto qualquer $A \in C$ sobre uma reta ℓ, perpendicular à reta que contém A e o centro de C, como mostra a Figura 1.3.2. Uma forma particularmente comum de fazê-lo é discutida na Seção 1.3.3.

Além disso, é claro da fórmula (1.3.1) que, embora tenhamos definido f com o propósito específico de levar um dado círculo numa dada reta, a fórmula está bem definida para qualquer ponto do plano $\mathbb{R}^2$, exceto aqueles na reta horizontal $\{y = 2\}$.

Exercício 1.3.2. Verifique que f leva todos os pontos (exceto $(0, 2)$) de uma reta ℓ não horizontal e que passa pelo ponto $(0, 2)$, no ponto de interseção de ℓ com o eixo horizontal.

1.3.2 Inversões em dimensão 2

Os exercícios a seguir discutem uma forma muito mais interessante de entender a função definida pela Equação (1.3.1) como uma transformação do plano no plano e que leva o círculo na reta como desejamos.

Exercícios 1.3.3. a) Seja C o círculo de centro $(0,1)$ e raio 1 e considere f definida em $C \setminus \{(0,2)\}$ pela Equação (1.3.1). Verifique que f é a restrição a C da seguinte transformação:

$$F(x,y) = \left(\frac{4x}{x^2+(y-2)^2},\ \frac{4(y-2)}{x^2+(y-2)^2}+2\right).$$

Como entender F é explicado nos itens a seguir.

b) Sejam $D_2(x,y) = (2x,2y)$, uma dilatação, e $T_{(0,1)}(x,y) = (x,y+1)$, uma translação, e seja

$$\iota(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right). \tag{1.3.2}$$

Mostre que $F = D_2 \circ T_{(0,1)} \circ \iota \circ T_{(0,1)}^{-1} \circ D_2^{-1}$. Isto é, a menos da troca de coordenadas pela composição $D_2 \circ T_{(0,1)}$, as transformações F e ι são essencialmente "a mesma" e, assim, entenderemos F se entendermos ι.

c) Mostre que $\iota^2 = \iota \circ \iota$ é a identidade em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que ι preserva raios começando na origem e que manda cada círculo centrado na origem e raio $r > 0$ no círculo centrado na origem e raio $\frac{1}{r}$. Em particular, ι fixa ponto a ponto o círculo unitário centrado na origem.

A transformação ι definida pela Equação (1.3.2) é o exemplo mais simples de uma *inversão*.

Definição 1.3.4. Dado um círculo $C \subset \mathbb{R}^2$, de centro O e raio $r > 0$, definimos $\iota_C : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, a *inversão em* C, por $\iota_C(P) = P^*$, onde P^* é o ponto, no raio com origem em O e contendo P, com a propriedade $|OP| \cdot |OP^*| = r^2$. Vamos reservar a notação ι para a inversão no círculo unitário centrado na origem de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 1.3.5. Verifique, usando a Definição 1.3.4 e a fórmula da transformação F dos Exercícios 1.3.3, que F é a inversão no círculo de centro $(0,2)$ e raio 2.

Podemos chegar à mesma conclusão de maneira mais conceitual, seguindo os passos do exercício a seguir.

Exercícios 1.3.6. a) Seja $D_\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ a dilatação pelo fator λ centrada na origem. Mostre que ι "anticomuta" com D_λ, isto é,

$$D_\lambda \circ \iota = \iota \circ D_\lambda^{-1} = \iota \circ D_{\frac{1}{\lambda}}.$$

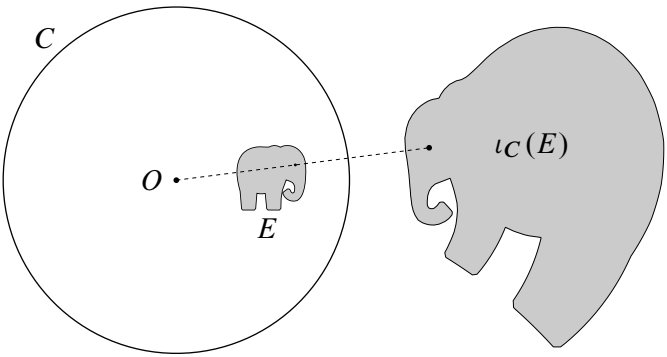


Figura 1.3.3: O conjunto E – o pequeno elefante – é transformado pela inversão ι_C no círculo C, resultando numa imagem distorcida, mas possível de reconhecer como um elefante.

Mostre também que $D_{\lambda^2} \circ \iota = \iota_{C_\lambda}$, onde C_λ é o círculo centrado na origem de raio λ. Conclua que $D_\lambda \circ \iota \circ D_\lambda^{-1} = \iota_{C_\lambda}$.

b) Mostre que, se $T_{\mathbf{v}}(x, y) = (x, y) + \mathbf{v}$ é a translação pelo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ e ι_C é a inversão no círculo C, então $T_{\mathbf{v}} \circ \iota_C \circ T_{\mathbf{v}}^{-1}$ é a inversão $\iota_{T_{\mathbf{v}}(C)}$ no círculo $T_{\mathbf{v}}(C)$.

c) Use os itens acima para mostrar que a inversão ι_C em qualquer círculo C pode ser escrita como uma composição da forma

$$T_{\mathbf{v}} \circ D_\lambda \circ \iota \circ D_\lambda^{-1} \circ T_{\mathbf{v}}^{-1} = T_{\mathbf{v}} \circ D_{\lambda^2} \circ \iota \circ T_{-\mathbf{v}}$$

e encontre o número $\lambda > 0$ e o vetor $\mathbf{v}$ em função do raio e do centro de C.

Em geral, inversões têm a interessante e utilíssima propriedade de levar círculos e retas em círculos e retas. Especificamente, seja C um círculo de centro O. Então a inversão ι_C age da seguinte maneira:

i) Se ℓ é uma linha reta que passa pelo centro O de C, então $\iota_C(\ell \setminus \{O\}) = \ell \setminus \{O\}$. (Imediato da definição).

ii) Se C' é um círculo passando por O, $\iota_C(C' \setminus \{O\})$ é uma reta que não passa por O.

iii) Se ℓ é uma reta que não passa por O, a sua imagem $\iota_C(\ell)$ é $C' \setminus \{O\}$, onde C' é um círculo que passa por O.

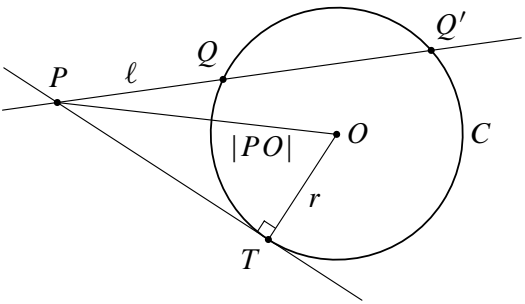


Figura 1.3.4: A potência do ponto P em relação ao círculo C pode ser entendida como o quadrado $|PT|^2$ da distância entre P e qualquer um dos dois pontos $T \in C$, com a propriedade que a reta tangente a C em T passa por P.

iv) Se C' é um círculo que não passa por O, então $\iota_C(C')$ é um outro tal círculo.

Vamos provar essas afirmações ao longo de alguns exercícios. Começamos com um resultado clássico de geometria plana. Seja P um ponto fora do disco cujo bordo é o círculo C, de centro O e raio $r > 0$, e seja ℓ uma reta passando por P e intersectando C nos pontos Q, Q', como ilustrado na Figura 1.3.4. Então o produto $|PQ| \cdot |PQ'|$ é constante, independente da reta ℓ (desde que $\ell \cap C \neq \varnothing$).

Exercícios 1.3.7. a) Prove a afirmação acima. Uma forma de fazê-lo é introduzindo coordenadas cartesianas, tomando C centrado no eixo horizontal, tomando retas de equação $y = mx$, e fazendo as contas. É útil lembrar que, se x_1 e x_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, então o produto x_1x_2 é igual a $\frac{c}{a}$.

b) Use o item anterior para mostrar que a inversão ι_C preserva círculos perpendiculares a C, trocando as partes que estão no interior e no exterior de C.

A constante acima, chamada *potência de P em relação ao círculo C*, é igual a $|PO|^2 - r^2$, sendo também igual, pelo Teorema de Pitágoras, a $|PT|^2$, onde $T \in C$ é um ponto tal que a reta passando por P e T seja tangente a C.

Os exercícios anteriores têm como consequência a seguinte importante propriedade de inversões:

Teorema 1.3.8. *Inversões em círculos são* conformes*, isto é, preservam ângulos.*

Demonstração. Dados um círculo C, um ponto $P \notin C$ e um vetor $\mathbf{v}$ baseado em P, existe um único círculo $C_{\mathbf{v}}$ que passa por P com tangente $\mathbf{v}$ e é perpendicular a C (verifique). Assim, se $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ são vetores baseados em P e $C_{\mathbf{v}}, C_{\mathbf{w}}$ são os círculos correspondentes, então, pelo exercício anterior, ι_C preserva cada círculo $C_{\mathbf{v}}, C_{\mathbf{w}}$, trocando as partes de dentro e de fora de C, e, portanto, levando P ao outro ponto

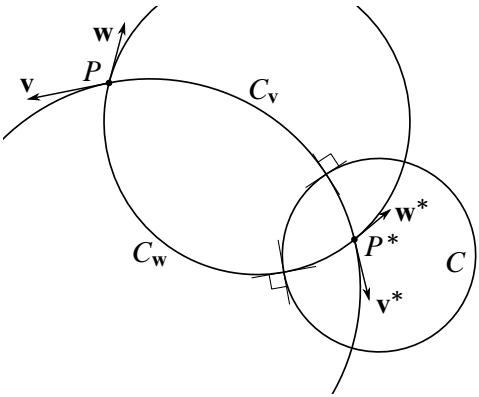


Figura 1.3.5: Em ambos os pontos de intersecção de dois círculos $C_\mathbf{v}$ e $C_\mathbf{w}$, o ângulo de intersecção é o mesmo.

P^* de interseção de $C_\mathbf{v}$ e $C_\mathbf{w}$ – veja Figura 1.3.5. Além disso, os vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ são levados (pela derivada de ι_C) em vetores $\mathbf{v}^*, \mathbf{w}^*$ baseados em P^*, que formam o mesmo ângulo que $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, uma vez que são tangentes aos mesmos círculos $C_\mathbf{v}, C_\mathbf{w}$, respectivamente. Isto prova a conformalidade de inversões em pontos P que não pertençam ao círculo de inversão. Uma maneira de concluir que conformalidade vale também em C é por continuidade. Outra é discutida no próximo exercício. □

Exercício 1.3.9. Introduzindo coordenadas de forma que a origem seja o centro O do círculo C e seu raio seja a unidade, a fórmula da inversão no círculo C torna-se a fórmula (1.3.2). Calcule a derivada $D\iota$ e mostre que ela pode ser escrita da forma

$$D\iota(x, y) = \lambda \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{1.3.3}$$

onde $\lambda > 0$ é real e $\theta \in [0, 2\pi)$. Encontre λ e θ em termos de x, y.

Isto quer dizer que a ação da derivada $D\iota$ em vetores tangentes é a composição de uma rotação, seguida de uma reflexão no eixo vertical, seguida de uma homotetia. Uma tal composição preserva ângulos e reverte orientação (det $D\iota < 0$), além de contrair ou dilatar vetores, multiplicando-os pelo fator λ.

O próximo exercício completa a demonstração de que inversões preservam o conjunto de todas as retas e círculos.

Exercícios 1.3.10. a) Comece convencendo-se de que dos Exercícios 1.3.6 segue que, se provamos que a inversão ι no círculo unitário leva círculos e retas em

círculos e retas como descrito na Página 15, podemos, então, concluir que o mesmo vale para a inversão em qualquer círculo C.

b) Mostre que a imagem da reta $\{y = c\}$ por ι é o círculo de centro $\left(0, \frac{1}{2c}\right)$ e raio $\frac{1}{2c}$ (e que, portanto, passa pela origem).

c) Mostre que a imagem do círculo de centro $(0, c)$ e raio $0 \leqslant r < c$ por ι é o círculo de centro $\left(0, \frac{c}{c^2-r^2}\right)$ e raio $\frac{r}{c^2-r^2}$. Note, em particular, que centros *não são levados* em centros, exceto no caso extremo $r = 0$. Observe o que acontece quando $r \to c$ e que isso é compatível com o Item b. Discuta o caso de círculos com raio $r > c$.

d) Seja R uma rotação ao redor da origem. Mostre que R e ι comutam, isto é, $R \circ \iota = \iota \circ R$. Conclua que o Item b implica que ι leva (quaisquer) retas que não passam pela origem em círculos que passam pela origem e que o Item c implica que ι leva (quaisquer) círculos que não passam pela origem em círculos com a mesma propriedade.

Isto termina a prova das propriedades de inversões listadas na Página 15. (Mas por que não precisamos provar a propriedade do Item ii?). Como a prova envolve contas, e mesmo sabendo que elas permitem uma certeza sólida de que está tudo realmente certo, talvez sejamos acusados de deselegância. Para uma demonstração bastante elegante dos resultados acima, recomendamos o livro Thurston (1997, Seção 1.2).

1.3.3 Uma projeção estereográfica importante

Voltando a projeções estereográficas, há, como já mencionamos acima, outras maneiras de defini-las, entre as quais a que descrevemos a seguir, que relaciona dois conjuntos particularmente úteis e bem-amados: o círculo unitário centrado na origem e o eixo horizontal. Podemos modificar a Figura 1.3.1, transladando o círculo para baixo uma unidade de modo que seu centro seja a origem e projetar, como anteriormente, ligando P ao "polo norte" do círculo por uma linha reta, definindo a projeção P^* como a interseção desta reta com o eixo horizontal: veja a Figura 1.3.6. Nesse caso, pontos do círculo contidos no semiplano inferior são levados ao intervalo $(-1, 1)$ no eixo horizontal, pontos do semiplano superior são levados ao complementar do intervalo $[-1, 1]$ no eixo horizontal, enquanto os pontos $(\pm 1, 0)$ são, claro, fixados pela projeção.

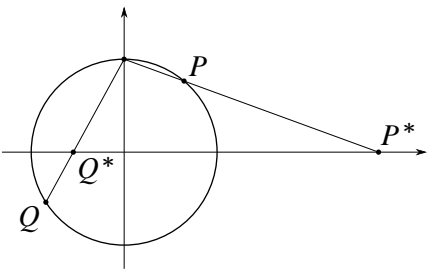


Figura 1.3.6: A projeção estereográfica de um círculo centrado na origem.

Exercícios 1.3.11. Seja $g\colon C \setminus \{(0,1)\} \to \mathbb{R}$ (onde C é o círculo unitário com centro na origem) a projeção estereográfica que acabamos de descrever. Prove as afirmações a seguir.

a) A fórmula de g é

$$g(x,y) = \frac{x}{1-y}. \tag{1.3.4}$$

b) g tem a seguinte propriedade interessante:

$$g(x,-y) = \frac{1}{g(x,y)}.$$

c) A inversa de g é dada pela fórmula

$$g^{-1}(u) = \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right).$$

d) g é a restrição ao círculo unitário C da inversão no círculo K de centro $(0,1)$ e raio $\sqrt{2}$, dada pela equação

$$\iota_K(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}\right). \tag{1.3.5}$$

1.3.4 De volta ao início: projeção estereográfica e compactificação por um ponto

Podemos agora voltar ao que motivou a introdução da projeção estereográfica: a "realização" da identificação entre a esfera S^n com a compactificação por um ponto de $\mathbb{R}^n$. Neste momento, estamos perfeitamente aptos a discutir o caso unidimensional que é, em essência, idêntico aos demais.

Exercício 1.3.12. Mostre que a projeção estereográfica induz um homeomorfismo entre a compactificação por um ponto de $\mathbb{R}$ e a esfera unidimensional, também conhecida como o círculo. Especificamente, sendo $C \subset \mathbb{R}^2$ o círculo de raio 1 centrado em $(0, 1)$, mostre que a função $f : C \setminus \{(0, 2)\} \to \mathbb{R}$ definida pela Equação (1.3.1) pode ser estendida a um homeomorfismo $\widehat{f} : C \to \widehat{\mathbb{R}}$, se definimos $\widehat{f}(0, 2) = \infty$.

A partir de agora, passaremos a tratar o ponto no infinito ∞ com certa intimidade, o que, como veremos a seguir, ajuda muito a organizar as ideias quando consideramos inversões e suas composições. Em particular, embora ainda não tenhamos provado que a esfera S^2 é homeomorfa à compactificação por um ponto do plano $\mathbb{R}^2$, mencionamos logo que é possível estender a definição de inversões a $\widehat{\mathbb{R}^2}$, fazendo-as levar o centro do círculo de inversão em ∞ e vice versa.

1.3.5 Os números complexos

Até aqui números complexos não foram necessários, mas continuar a evitá-los não seria proveitoso a partir de agora e fazemos uma breve introdução. Há, claro, vários livros excelentes sobre o assunto como, por exemplo, Ahlfors (1978) e Carathéodory (1954b). Embora seja provável que a leitora conheça bem os números complexos, é possível que não conheça tão bem os quatérnios que serão discutidos no Capítulo 2 e a introdução que fazemos a seguir será também pertinente naquele contexto. Na Seção 2.1, em particular, veremos um modelo diferente para o corpo dos números complexos e, ao lê-la, será útil ter em mente o que é dito a seguir.

Um número complexo é um "número" da forma $z = a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Escrevemos a palavra "número" entre aspas porque poderíamos chamá-lo de "objeto" ou de qualquer outro nome: a palavra "número" vem carregada de significado e, neste momento, pode ser útil esquecer essa carga e pensar no novo objeto, não do ponto de vista de algo que já conhecemos (números), mas como algo novo que entenderemos do ponto de vista *operacional*, isto é, do ponto de vista das operações que realizamos, de como essas operações se comportam e o que elas nos permitem fazer. Um passo posterior será, claro, observar que nossa nova definição generaliza definições anteriores.

O nome da "unidade imaginária" i, em particular, é especialmente carregado de significado, que reflete o desconforto psicológico causado aos primeiros mate-

máticos que a consideraram[2]. Esse é um excelente nome para esquecermos agora e, para isso, podemos *definir* um número complexo simplesmente como um par ordenado (a, b) de números reais. Definimos a soma de números complexos como a velha soma de pares ordenados em $\mathbb{R}^2$, que se faz termo a termo,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

mas definimos também uma nova operação sobre tais pares, que chamamos *produto* (mas que também poderíamos chamar por outro nome), da seguinte forma:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Tendo definido as operações, deveríamos, então, discutir pra que servem e como se comportam, mas vamos recomendar que o leitor consulte as primeiras páginas de um livro de análise complexa. Mencionamos aqui apenas que identificamos nosso velho conhecido, o conjunto $\mathbb{R}$ de números reais, com o subconjunto dos números complexos da forma $(x, 0)$. Tendo feito isto, chegamos ao primeiro resultado sobre este novo conjunto de números, que indica seu enorme potencial: no conjunto de números complexos, é possível resolver a equação

$$z^2 + 1 = 0 \tag{1.3.6}$$

isto é, existe um número complexo $z = (x, y)$ com a propriedade de que, ao multiplicá-lo por si próprio e somar o número complexo $(1, 0)$, que identificamos com o número real 1 (mas que é também o elemento neutro da multiplicação complexa), produz o número $(0, 0)$, que identificamos com o número real 0 (mas que é também o elemento neutro da soma complexa). Usando as definições de produto e soma que acabamos de introduzir, obtemos:

$$\begin{aligned}((0, 1) \cdot (0, 1)) + (1, 0) &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + (1, 0) \\ &= (-1, 0) + (1, 0) \\ &= (0, 0)\end{aligned}$$

isto é, o número complexo $(0, 1)$ satisfaz a Equação (1.3.6).

O conjunto dos números complexos com a soma e o produto que acabamos de definir é denotado por $\mathbb{C}$, sendo possível provar que $\mathbb{C}$ é um *corpo*, no sentido

[2]Imagine-se sem a perspectiva que temos atualmente – de que o conjunto dos números complexos é identificado com o plano – tentando pensar em $\sqrt{-1}$ como algo que deveria estar entre os "números", isto é, entre os únicos números conhecidos como tal, os números reais.

algébrico. Em particular, com exceção de $(0,0)$, todo número complexo tem um inverso multiplicativo: o inverso multiplicativo de $z = (x, y)$, isto é, o número complexo w tal que $z \cdot w = (1, 0)$, é denotado por $w = \frac{1}{z}$ e (verifique)

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \tag{1.3.7}$$

Voltaremos em breve a inversões e projeções estereográficas, e é bom observar desde já a semelhança (e a diferença) entre as Equações (1.3.2) e (1.3.7).

1.3.6 Transformações lineares fracionárias

Após essa breve introdução aos números complexos, voltamos a usar a notação mais usual $x + iy$ para denotar o número complexo (x, y) e passamos a falar, sem maior cerimônia, sobre certas funções complexas especialmente simples e especialmente úteis no presente contexto. Uma função complexa da forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1.3.8}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, é chamada uma *transformação linear fracionária*. Com a operação de composição, o conjunto de todas as transformações lineares fracionárias é um grupo, desde que a condição de não-degenerescência $ad - bc \neq 0$ seja satisfeita, como explicam os exercícios que seguem.

Exercícios 1.3.13. a) Mostre que se f, g são transformações lineares fracionárias, então a composição $f \circ g$ também o é.

b) Calcule a inversa f^{-1} de uma transformação linear fracionária e note que f^{-1} também o é. Observe também que você teve que supor que $ad - bc \neq 0$, isto é, para que o que dissemos sobre o conjunto de transformações lineares fracionárias formarem um grupo, precisamos assumir que $ad - bc \neq 0$. Definindo

$$\mathrm{TLF}(\mathbb{C}) = \left\{ f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0 \right\} \tag{1.3.9}$$

o que acabamos de provar mostra que $\mathrm{TLF}(\mathbb{C})$ é um grupo.

c) Qual é o elemento neutro do grupo $\mathrm{TLF}(\mathbb{C})$?

d) Mostre que se $ad - bc = 0$, então f, como em (1.3.8), é a função constante. Por outro lado, se $ad - bc \neq 0$ e $c \neq 0$, então f define uma transformação contínua e bijetiva de $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, que preserva orientação e tem inversa contínua. E o que acontece quando $c = 0$?

e) Mostre que é possível estender a transformação linear fracionária f a um homeomorfismo da compactificação por um ponto $\widehat{\mathbb{C}} \cong \widehat{\mathbb{R}^2}$ de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ definindo

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{e} \quad f(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Transformações lineares fracionárias são muito mais suaves que apenas contínuas: elas são funções analíticas complexas. Não discutiremos aqui a teoria de funções analíticas, mas usaremos a seguir alguns resultados que enunciaremos quando vierem à tona.

Na verdade, a estrutura de grupo de TLF($\mathbb{C}$) é uma velha conhecida. O conjunto de matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas complexas tem uma notação chique:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A : A \text{ é uma matriz complexa } n \times n \text{ e } \det A \neq 0\}. \qquad (1.3.10)$$

As letras "GL" vêm do inglês: *General Linear*. Com a operação de multiplicação de matrizes, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ é um grupo (claro). O que é importante para nós, neste momento, é que $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ e TLF($\mathbb{C}$) são "quase" o mesmo grupo: definimos

$$\Phi\colon \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{TLF}(\mathbb{C})$$

por

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}\right). \qquad (1.3.11)$$

Exercícios 1.3.14. a) Mostre que Φ define um epimorfismo de grupos, isto é, Φ é um homomorfismo sobrejetivo. (Parte das contas já foi feita no Item a dos Exercícios 1.3.13.)

b) Mostre que o núcleo de Φ é o subgrupo (normal) de múltiplos não nulos da matriz identidade I.

c) Definimos o subgrupo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ por

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : \det A = 1\}. \qquad (1.3.12)$$

Mostre que $\Phi|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}\colon \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{TLF}(\mathbb{C})$ também é um epimorfismo de grupos. Qual é o seu núcleo? (Cuidado).

d) Definimos o grupo quociente

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/\operatorname{Ker}\Phi = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\operatorname{Ker}\left(\Phi|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}\right). \quad (1.3.13)$$

Certifique-se de que a segunda igualdade acima está correta e mostre que os grupos $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ e $\mathrm{TLF}(\mathbb{C})$ são isomorfos.

Com frequência (mas nem sempre), tomamos um múltiplo comum dos coeficientes de uma transformação linear fracionária de forma que sua representação

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

satisfaça $ad - bc = 1$: isto é sempre possível, desde que $ad - bc \neq 0$.

As letras "SL", na Equação (1.3.12), vêm do inglês para *Special Linear*, sendo que *special* refere-se à condição $\det A = 1$. A letra "P" em "PSL" indica a *projetivização*, isto é, o quociente pela relação que considera equivalentes matrizes que diferem por um múltiplo não nulo.

Todas as definições acima podem ser feitas usando outros corpos de coeficientes no lugar de $\mathbb{C}$. A única outra possibilidade que nos interessa aqui é considerar coeficientes reais, definindo assim $\mathrm{TLF}(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$.

1.3.7 Transformações lineares fracionárias e geometria

O que foi discutido acima sobre transformações lineares fracionárias dependia apenas da mecânica das operações com números complexos, que é a mesma que a dos números reais[3], com a qual estamos fartamente acostumados. Voltamos agora a falar de números complexos e suas operações para podermos traduzir as transformações da geometria plana, com as quais vimos lidando, para a linguagem de transformações complexas. A menos que digamos explicitamente o contrário, sempre que escrevermos $z = x + iy$ estaremos assumindo que x, y são números reais, chamados, respectivamente, de *parte real* e *parte imaginária* do número complexo $z \in \mathbb{C}$, denotadas por $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$. Note que ambas $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ são números reais.

Uma operação simples, mas fundamental para a álgebra de números complexos, é a *conjugação complexa* ou, simplesmente, *conjugação*. Por definição, o complexo conjugado do número $z = x + iy$ é o número $\bar{z} = x - iy$, isto é, o número complexo $\bar{z}$ obtido trocando o sinal da parte imaginária $\operatorname{Im} z$ de z. O *valor*

[3] Isto se deve ao fato de $\mathbb{C}$ ser um corpo de característica 0.

absoluto ou *módulo* de um número complexo $z = x + iy$ é $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, isto é, a distância euclidiana no plano xy da origem 0 a z; vale a equação $|z|^2 = z\bar{z}$.

O último ingrediente importante a ser lembrado aqui é a famosa *fórmula de Euler*:

Exercício 1.3.15. Prove que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Escreva a série de potências de $e^{i\theta}$, use $i^2 = -1$ e separe a série em suas partes real e imaginária.

Podemos, então, escrever todo número complexo $z \neq 0$ na forma

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ &= r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\ &= re^{i\theta}, \end{aligned}$$

onde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ é o ângulo que o vetor $\overrightarrow{0z}$ forma com o eixo real positivo.

Exercício 1.3.16. Verifique que a transformação $z \mapsto (re^{i\theta})z$, de multiplicação pelo número complexo $re^{i\theta}$, corresponde à composição $(x, y) \mapsto D_r \circ R_\theta(x, y)$, onde, como acima, D_r é a homotetia pelo fator r, e R_θ é a rotação de ângulo θ centrada na origem.

Vejamos agora como é a correspondência entre transformações da geometria plana e transformações usando as operações algébricas dos números complexos sob a identificação $(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$:

Translações. À translação no plano $(x, y) \mapsto (x, y) + (a, b)$, corresponde a transformação afim complexa $z \mapsto z + (a + ib)$.

Homotetias. À homotetia $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ pelo fator $\lambda > 0$, corresponde a transformação linear $z \mapsto \lambda z$

Rotações. À rotação $(x, y) \mapsto (x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$, corresponde a transformação linear $z \mapsto e^{i\theta}z$ de multiplicação por um número complexo de valor absoluto 1.

Reflexões. À reflexão no eixo horizontal $(x, y) \mapsto (x, -y)$, corresponde a conjugação complexa $z \mapsto \bar{z}$.

Simetria central À simetria central $(x, y) \mapsto (-x, -y)$, corresponde $z \mapsto -z$.

Inversões. À inversão ι no círculo unitário definida pela Equação (1.3.2), corresponde

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} \tag{1.3.14}$$

que também denotaremos por $\iota(z)$.

Esta última correspondência é consequência direta da Equação (1.3.7) e da definição de conjugação.

Com isso, podemos traduzir tudo o que fizemos para inversões e projeções estereográficas no plano para a linguagem dos números complexos. Embora possa não ficar imediatamente claro, isso é de grande valia tanto para as geometrias planas (euclidiana, mas também a *hiperbólica* que mencionaremos mais tarde) quanto para a análise complexa.

Exercícios 1.3.17. a) Sejam $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Mostre que transformação "antilinear" fracionária

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + \left(r^2 - |a|^2\right)}{\bar{z} - \bar{a}} \tag{1.3.15}$$

é a inversão no círculo de centro $a \in \mathbb{C}$ e raio r. Isto significa que toda inversão em um círculo pode ser escrita como a composição de conjugação complexa com uma transformação linear fracionária.

b) Por outro lado, verifique que

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2\left(z + \frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c} \tag{1.3.16}$$

e interprete o lado direito dessa igualdade como uma composição de conjugação complexa, seguida de uma translação, seguida da inversão no círculo unitário, seguida de uma rotação e de uma homotetia e, finalmente, seguida de mais uma translação.

Vejamos agora alguns exemplos da enorme flexibilidade proporcionada pela introdução da álgebra complexa. Para começar, traduzamos para a linguagem complexa a projeção e a inversão dos Exercícios 1.3.11.

Exercícios 1.3.18. a) Seja $C = C(i, \sqrt{2})$ o círculo de centro $i \in \mathbb{C}$ e raio $\sqrt{2}$. Verifique que a inversão em C é dada pela fórmula

$$\iota_C(z) = \frac{i\,\bar{z} + 1}{\bar{z} + i}.$$

b) Mostre que, se $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, é um número complexo de norma 1, então

$$\iota_C\left(e^{i\varphi}\right) = \frac{\cos\varphi}{1 - \operatorname{sen}\varphi}. \tag{1.3.17}$$

Conclua que ι_C leva o círculo unitário menos o polo norte $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ em todo o eixo real. Compare com os Exercícios 1.3.11.

Os próximos exercícios são bons exemplos de como cálculos que, feitos usando geometria plana podem levar ao desespero pessoas de coração fraco, tornam-se passeios no parque se usarmos álgebra complexa.

Exercício 1.3.19. Sejam $C = C\left(i, \sqrt{2}\right)$ e ι_C como nos Exercícios 1.3.18. Mostre que

$$\iota_C \circ \iota \circ \iota_C(z) = \bar{z}. \tag{1.3.18}$$

Introduzimos agora dois novos grupos que são de grande importância para as geometrias euclidiana e hiperbólica. O *grupo de Möbius geral* no plano $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, denotado por GMöb($\mathbb{C}$) ou GMöb $\left(\mathbb{R}^2\right)$, é o grupo de transformações de $\mathbb{R}^2$ gerado por inversões em círculos, isto é, os elementos de GMöb $\left(\mathbb{R}^2\right)$ são composições de um número finito de inversões em círculos. O *grupo de Möbius* Möb $\left(\mathbb{R}^2\right)$ é o subgrupo (de índice 2) de GMöb $\left(\mathbb{R}^2\right)$ de transformações que preservam orientação, isto é, os elementos de Möb $\left(\mathbb{R}^2\right)$ são composições de um número par de inversões em círculos.

Exercícios 1.3.20. a) Mostre que GMöb $\left(\mathbb{R}^2\right)$ é igual ao grupo gerado por todas as translações, homotetias, rotações, inversões e reflexões de $\mathbb{R}^2$. *Sugestão:* O Exercício 1.3.19 implica que GMöb $\left(\mathbb{R}^2\right)$ contém as reflexões. Translações podem ser obtidas como composições de duas reflexões em retas paralelas e rotações como composições de duas reflexões em retas que se intersectam. Homotetias são obtidas como a composições de duas inversões em círculos concêntricos.

b) Mostre que Möb $\left(\mathbb{R}^2\right)$ e TLF $(\mathbb{C})$ são "o mesmo grupo" (isto é, são grupos isomorfos).

1.3.8 Rotações e projeção estereográfica em dimensão 1

Na Seção 1.3.4 vimos que a compactificação por um ponto $\widehat{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ é homeomorfa ao círculo e que a projeção estereográfica realiza este homeomorfismo. Aqui vemos como a projeção estereográfica "traduz" rotações do círculo em transformações de $\mathbb{R}$ e de $\widehat{\mathbb{R}}$.

Exercício 1.3.21. Seja $C = C(i, \sqrt{2})$, como nos Exercícios 1.3.18, e seja $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$ a rotação centrada na origem, por ângulo θ no sentido anti-horário. Se definimos $f_\theta(z) = \iota_C \circ R_\theta \circ \iota_C^{-1}(z)$, então

$$f_\theta(z) = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) z + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\left(-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) z + \cos\frac{\theta}{2}}. \tag{1.3.19}$$

Observe que a Equação (1.3.19) define uma transformação linear fracionária e é, portanto, uma transformação que preserva orientação e leva bijetiva e continuamente $\mathbb{C} \setminus \{\cot\frac{\theta}{2}\}$ em $\mathbb{C} \setminus \{-\cot\frac{\theta}{2}\}$. Como os coeficientes são números reais, f_θ também define uma transformação de $\mathbb{R} \setminus \{\cot\frac{\theta}{2}\}$ em $\mathbb{R} \setminus \{-\cot\frac{\theta}{2}\}$. Assim, o exercício mostra, entre outras coisas, que uma rotação do círculo é levada a uma transformação linear fracionária real pela mudança de coordenadas dada pela projeção estereográfica da Equação (1.3.17) (que é a mesma que a Equação (1.3.4)). Além disso, definindo

$$f_\theta\left(\cot\frac{\theta}{2}\right) = \infty \quad \text{e} \quad f_\theta(\infty) = -\cot\frac{\theta}{2}$$

obtemos um homeomorfismo $f_\theta : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ cuja restrição a $\widehat{\mathbb{R}}$ também é um homeomorfismo.

1.4 Projeções e inversões em dimensões maiores

A ideia de projeções estereográficas em dimensões maiores é análoga ao que fizemos em dimensão 1 e a Figura 1.4.1 mostra, em dimensão 2, a projeção estereográfica análoga àquela da Figura 1.3.1. Como já vimos a importância de inversões, ao invés de tomar uma rota paralela à da seção anterior, vamos começar discutindo inversões em dimensão qualquer. O que realmente nos interessa são dimensões 3 e 4, mas a discussão é a mesma em qualquer dimensão e seria pouco instrutivo fazermos contas com 3 ou 4 variáveis.

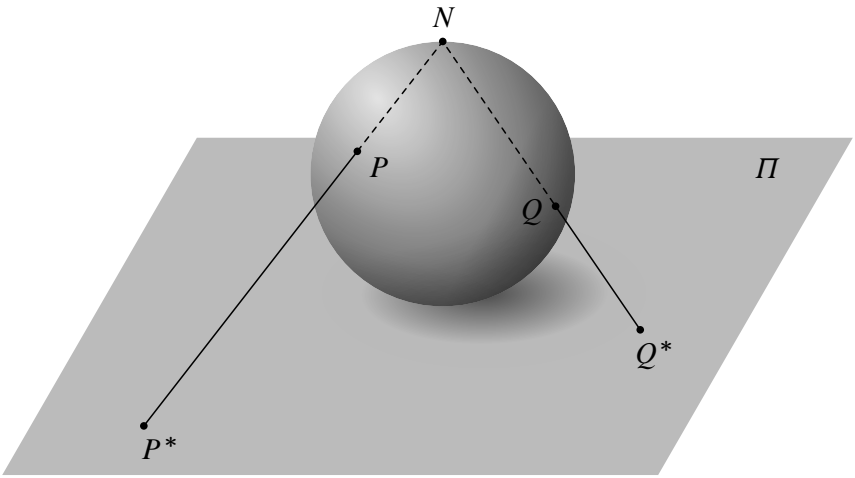


Figura 1.4.1: A projeção estereográfica leva cada ponto da 2-esfera S^2, exceto o polo norte N, ao plano Π, cujo ponto de tangência com S^2 é o polo sul, antípoda de N. Para qualquer $P \in S^2 \setminus \{N\}$, a imagem P^* é o ponto de intersecção do plano Π com a reta que passa por N e P.

Usaremos a seguinte notação. Letras em negrito, como $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, são pontos ou vetores no $\mathbb{R}^n$, e $\|\mathbf{x}\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana do vetor $\mathbf{x}$, ou a distância do ponto $\mathbf{x}$ à origem, que será denotada por $\mathbf{0}$. Mas também continuaremos, como acima, a usar letras maiúsculas, como O, P, Q, para denotar pontos, PQ para indicar o segmento que une P e Q e $|PQ|$ para denotar o comprimento deste segmento, isto é, a norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$. Passaremos a usar S para denotar esferas em dimensões maiores que 2, e tentaremos guardar C para círculos, em qualquer dimensão.

E já que falamos de esferas, é bom defini-las: a esfera n-dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro O e raio $r \geqslant 0$ é definida por

$$S(O, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x} - O\|^2 = r^2\right\}.$$

Sempre que falarmos de esferas, sem especificar a dimensão n, estaremos nos referindo a esferas como acima, com uma dimensão a menos que o espaço ambiente $\mathbb{R}^{n+1}$, a que matemáticos gostam de se referir como *codimensão* 1. Quando quisermos falar de esferas de maior codimensão, como círculos em $\mathbb{R}^3$, isso será indicado explicitamente.

1.4.1 Inversões em dimensão qualquer

A definição que generaliza a Definição 1.3.4 é

Definição 1.4.1. Seja $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera de centro O e raio r. A *inversão em S*, denotada por $\iota_S : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{O\}$, é definida por $\iota_S(P) = P^*$, onde P^* é o ponto no raio com origem em O e que contém P e tal que $|OP| \cdot |OP^*| = r^2$.

A inversão mais simples e, como acima, a que pode ser utilizada para obter todas as outras, para a qual reservaremos a notação ι, é a inversão na esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\iota(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2} \cdot (x_1, \ldots, x_{n+1}) \,. \tag{1.4.1}$$

Observe, antes de mais nada, que essa fórmula é a análoga em dimensão n da Equação (1.3.2).

Vejamos agora as propriedades de inversões em dimensão $n+1$ análogas àquelas que discutimos para inversões em dimensão 2.

Exercícios 1.4.2. a) Certifique-se, para começar, que a Equação (1.4.1) de fato realiza a Definição 1.4.1 para a esfera unitária com centro $\mathbf{0}$.

b) Mostre que $\iota = \iota^{-1}$, isto é, ι é uma *involução*; que ι preserva raios com origem na origem $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$ (por definição), e preserva a família de esferas centradas na origem, levando $S(\mathbf{0}, r)$ em $S\left(\mathbf{0}, \frac{1}{r}\right)$.

c) Seja A uma matriz real $(n+1) \times (n+1)$ que preserva a norma de vetores, isto é, tal que

$$\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|. \tag{1.4.2}$$

Mostre que A comuta com ι, isto é, $\iota \circ A = A \circ \iota$.

O próximo passo é mostrar que inversões preservam esferas e, em dimensões maiores, essa afirmação é mais forte do que em dimensão 2, já que inversões em $\mathbb{R}^{n+1}$ preservam esferas de todas as dimensões $1, 2, \ldots, n$. Ou seja, aqui já estamos usando a convenção, que continuaremos a usar nesta seção, de chamar de "esfera" as esferas (claro) de qualquer dimensão, os hiperplanos em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, os subespaços afins de dimensão n, e, ainda mais geralmente, qualquer subespaço afim de $\mathbb{R}^{n+1}$.

A estratégia usada nos Exercícios 1.3.10 foi provar, para a inversão ι no círculo unitário, a afirmação para círculos em posições específicas, e depois argumentar que podemos mudá-los para qualquer posição usando rotações. Além disso, por conjugações (mudanças de coordenadas) por homotetias e translações, podemos obter qualquer inversão a partir de ι e, como homotetias e translações preservam círculos, concluímos que inversões (em geral) preservam a família de círculos (e retas). Para que essa estratégia possa ser utilizada em dimensões maiores, devemos decidir o que chamar de "rotações" em $\mathbb{R}^{n+1}$ e preocupar-nos se tais rotações têm a propriedade, análoga ao plano, de que qualquer vetor de $\mathbb{R}^{n+1}$ pode ser obtido como uma "rotação" de um vetor em um dos eixos coordenados.

Exercícios 1.4.3. a) Mostre que qualquer vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ no plano pode ser obtido como uma rotação de um vetor do eixo vertical, isto é, encontre uma matriz A da forma

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

e um vetor $\mathbf{y} = (0, y)$ tais que $A\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

b) O item anterior é fácil, mas em dimensão 3 a situação é menos simples. Como você faria para, dado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, encontrar uma matriz "de rotação" A, 3×3, e um vetor $\mathbf{z} = (0, 0, z)$ tais que $A\mathbf{z} = \mathbf{x}$? Em particular, entre todas as matrizes 3×3, quais devemos chamar de "matrizes de rotação"?

O Item c dos Exercícios 1.4.2 já havia dado o *spoiler* do que chamar de rotações em dimensões maiores. Uma matriz quadrada real A é *ortogonal* se satisfaz a Equação (1.4.2) e as transformações lineares induzidas por matrizes ortogonais que preservam orientação (já que rotações no plano preservam orientação) serão as "rotações" centradas na origem, embora não se use esse termo com frequência para dimensões maiores que 2.

Deixando de lado por um momento esta questão, voltemos a inversões e façamos as contas para provar que a inversão ι na esfera unitária centrada na origem tem propriedades análogas àquelas listadas nos Exercícios 1.3.10. Como anteriormente, a translação pelo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ é a transformação $\mathbf{x} \mapsto T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$ e a homotetia de fator $\lambda \neq 0$ é a transformação $\mathbf{x} \mapsto D_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}\|$. Para tornar as contas do exercício a seguir menos dolorosas (quase agradáveis), usamos a notação $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, onde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, para denotar o ponto $(x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Sua norma é dada por $\|(\mathbf{x}, t)\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + t^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + t^2$, mas ao fazer as contas, use $\mathbf{x}$ e $\|\mathbf{x}\|$ e esqueça que $\mathbf{x}$ tem coordenadas. O símbolo $\mathbf{0}$ aqui será usado para denotar a origem em $\mathbb{R}^n$ de forma que $(\mathbf{0}, t)$ é um ponto no $(n+1)$-ésimo eixo coordenado em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercícios 1.4.4. a) Seja $S = S(O, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera de centro O e raio r. Encontre $\lambda > 0$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tais que

$$\iota_S = D_\lambda \circ T_\mathbf{v} \circ \iota \circ T_\mathbf{v}^{-1} \circ D_\lambda^{-1}. \tag{1.4.3}$$

Mostre também que $\iota \circ D_\lambda = D_{\frac{1}{\lambda}} \circ \iota$, de modo que a Equação (1.4.3) pode ser reescrita como

$$\iota_S = T_\mathbf{w} \circ D_{\lambda^2} \circ \iota \circ T_{(-\mathbf{w})}. \tag{1.4.4}$$

Note a relação com Equação (1.3.16).

b) Mostre que a imagem do hiperplano $\{(\mathbf{x}, t) : t = c\}$ pela inversão ι é a esfera de centro $\left(\mathbf{0}, \frac{1}{2c}\right)$ e raio $\frac{1}{2c}$, que passa pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$. Em particular, para $c = 1$, tanto o hiperplano quanto sua imagem são tangentes à esfera de inversão no ponto $(\mathbf{0}, 1)$.

c) Mostre que a imagem da esfera de centro $(\mathbf{0}, c)$ e raio $0 \leqslant r < c$ por ι é a esfera de centro $\left(\mathbf{0}, \frac{c}{c^2 - r^2}\right)$ e raio $\frac{r}{c^2 - r^2}$. Note, em particular, que centros *não são levados* em centros, exceto no caso extremo $r = 0$. Observe o que acontece quando $r \to c$ e que isso é compatível com o Item b. Discuta o caso de esferas com raio $r > c$.

d) No Item c dos Exercícios 1.4.2 você mostrou que ι comuta com transformações ortogonais. Assuma que sabemos que, para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1}$, existem $t \geqslant 0$ e uma matriz ortogonal A tais que $A(\mathbf{0}, t) = \mathbf{z}$ (Exercícios 1.4.5 abaixo), e use o que foi feito nos itens anteriores para mostrar que ι leva (quaisquer) hiperplanos que não passam pela origem em esferas que passam pela origem e que leva (quaisquer) esferas que não passam pela origem em esferas com a mesma propriedade. Conclua que inversões em geral têm propriedades análogas e enuncie-as em detalhe.

e) Planos e esferas de codimensão maior que 1 em $\mathbb{R}^n$ podem ser obtidos (ou mesmo definidos) como interseções entre planos e esferas de codimensão 1. Conclua que inversões preservam o conjunto de todos os planos e esferas de qualquer codimensão em $\mathbb{R}^n$.

A outra propriedade importante de inversões que discutimos em dimensão 2 foi conformalidade, que também vale em dimensões maiores. Para prová-la vamos usar propriedades de transformações ortogonais que estabelecemos agora, uma das quais já foi invocada no Item d dos Exercícios 1.4.4.

Definimos o produto escalar usual entre dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ pela fórmula

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \tag{1.4.5}$$

Aqui (e com maior frequência do que estamos acostumados a observar) é útil pensar em vetores em $\mathbb{R}^n$ como vetores coluna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

de forma que o produto escalar é simplesmente o produto matricial do vetor linha $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ com o vetor coluna $\mathbf{y}$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}. \tag{1.4.6}$$

A norma de $\mathbf{x}$ é dada pela equação $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}$. O *ângulo* entre dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ é definido pela equação

$$\cos \measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \tag{1.4.7}$$

em analogia ao que acontece em dimensões 2 e 3. Uma transformação linear A é *conforme* se preserva ângulos, isto é, se

$$\measuredangle(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4.8}$$

Em geral, dizemos que uma transformação f é *conforme* se sua derivada Df tem a propriedade acima em cada ponto do domínio.

Como mencionado anteriormente, chamamos *ortogonal* uma matriz quadrada real A que preserva a norma de vetores, isto é, tal que

$$\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4.9}$$

Definimos o *grupo ortogonal* $\mathrm{O}(n)$ por

$$\mathrm{O}(n) = \{A \text{ matriz real } n \times n : A \text{ é ortogonal}\}. \tag{1.4.10}$$

Exercícios 1.4.5. a) Mostre que uma matriz ortogonal A preserva o produto escalar, isto é,

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle .$$

Conclua, em particular, que transformações ortogonais são conformes. *Sugestão:* Use a linearidade do produto matricial para expandir ambos os lados da igualdade

$$\langle A(\mathbf{x} + \mathbf{y}), A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle .$$

b) Mostre que se A é ortogonal, então as colunas de A formam um conjunto ortonormal de vetores, isto é, têm norma 1 e são ortogonais uns aos outros. Conclua que A é ortogonal se e somente se $A^{\mathrm{T}}A = I$, isto é, $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$. *Sugestão:* O que são os números que aparecem em $A^{\mathrm{T}}A$? Use o item anterior com os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

c) Mostre que $\mathrm{O}(n)$ é de fato um grupo sob a operação de produto de matrizes.

d) Da igualdade $A^{\mathrm{T}}A = I$ segue que $\det A = \pm 1$ (verifique) e há, então, um subgrupo de $\mathrm{O}(n)$ pedindo para ser definido:

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}. \tag{1.4.11}$$

Mostre que $\mathrm{SO}(n)$ é, de fato, um subgrupo, que é, além disso, um subgrupo normal de $\mathrm{O}(n)$ de índice 2 em $\mathrm{O}(n)$, isto é, há duas classes de congruência de $\mathrm{SO}(n)$ em $\mathrm{O}(n)$. Note que as palavras chiques usadas são muito mais complicadas do que as provas.

e) Mostre que se $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ são tais que $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, então existe $A \in \mathrm{O}(n)$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Diz-se assim que o grupo ortogonal age *transitivamente* em esferas centradas na origem. *Sugestão:* Comece mostrando que basta provar que, dado qualquer vetor de norma igual a 1, existe uma transformação ortogonal que o leva em um vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Depois mostre que, dado $\mathbf{x}$ com norma 1, é sempre possível encontrar uma base de $\mathbb{R}^n$ que inclui $\mathbf{x}$. Por fim, use Gram–Schmidt para ortogonalizar essa base, começando com o vetor $\mathbf{x}$. Quais são as colunas da matriz desejada?

f) Verifique que, no item anterior, podemos tomar $A \in \mathrm{SO}(n)$.

Tendo estabelecido a transitividade das ações de $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ em esferas centradas na origem, voltamos agora à questão da conformalidade de inversões que, como veremos agora, não é uma questão, mas um fato. Vimos que ι comuta com transformações ortogonais, de forma que a equação $A^{-1} \circ \iota \circ A = \iota$ é uma trivialidade. É desta trivialidade, no entanto, ou, mais precisamente, de sua derivada, que deduziremos a conformalidade das inversões. Como também vimos que toda inversão é obtida da inversão ι por uma mudança de coordenadas por uma homotetia e uma translação, transformações essas que são claramente conformes (verifique), basta mostrar que ι é conforme.

Exercícios 1.4.6. a) Calcule a derivada da inversão ι da Equação (1.4.1) em um ponto do primeiro eixo coordenado e mostre que ela é a composição de uma homotetia com a reflexão em um hiperplano, sendo, portanto, conforme.

b) Para um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tome $A \in \mathrm{O}(n)$ tal que $A(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x}\|, 0, \ldots, 0)$ e use a regra da cadeia para concluir que $D\iota(\mathbf{x}) = D\left(A^{-1} \circ \iota \circ A\right)(\mathbf{x})$ também é conforme.

1.4.2 Projeções estereográficas em dimensão qualquer

Usamos agora o que aprendemos acima sobre inversões para discutir projeções estereográficas em dimensão n. Vamos nos concentrar em uma projeção estereográfica específica – aquela que leva S^n, a esfera unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, sobre o hiperplano "horizontal" –, mas essa é apenas uma escolha entre muitas, como mencionamos no caso de dimensão 1. Continuaremos a usar a notação $(\mathbf{x}, t)$ para denotar um ponto em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$.

Exercícios 1.4.7. a) Seja $S = S\left((\mathbf{0}, 1), \sqrt{2}\right)$ a esfera de raio $\sqrt{2}$ e centro no ponto $(\mathbf{0}, 1)$ do $(n+1)$-ésimo eixo coordenado. Verifique que a inversão em S é dada pela fórmula

$$\iota_S(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{2\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2 + (t-1)^2}, \frac{2(t-1)}{\|\mathbf{x}\|^2 + (t-1)^2} + 1\right).$$

b) A esfera unitária S^n centrada na origem contém o centro de S e, portanto, sua imagem por ι_S é um hiperplano. Verifique que ele é o hiperplano "horizontal"

$$\Pi = \{(\mathbf{x}, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

e que, se g é a restrição de ι_S à esfera unitária S^n menos o centro $(\mathbf{0}, 1)$ da esfera de inversão, então

$$g(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{1-t} \cdot \mathbf{x}. \tag{1.4.12}$$

Compare esta fórmula com a Equação (1.3.4).

c) Enuncie e verifique para a função g do item anterior propriedades análogas àquelas dos Exercícios 1.3.11. Em particular, convença-se de que ela é realmente a fórmula de uma projeção estereográfica, isto é, que é a fórmula que se obtém definindo $g\colon S^n \setminus \{(\mathbf{0}, 1)\} \to \Pi$ por $g(P) = P^*$, onde P^* é o ponto de interseção da reta que contém $(\mathbf{0}, 1)$ e P com o plano Π.

E podemos agora, antes de discutir inversões e projeções estereográficas um pouco mais, tomar conta da motivação inicial pela qual percorremos o caminho até aqui: a identificação da esfera S^n com a compactificação por um ponto de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 1.4.8. Mostre que a projeção estereográfica induz um homeomorfismo entre a compactificação por um ponto de $\mathbb{R}^n$ e a esfera S^n. Especificamente, sendo $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária centrada na origem, mostre que a função $g\colon S^n \setminus \{(\mathbf{0},1)\} \to \mathbb{R}^n$ definida pela Equação (1.4.12) pode ser estendida a um homeomorfismo $\widehat{g}\colon S^n \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ fazendo $\widehat{g}(\mathbf{0},1) = \infty$.

1.4.3 Rotações e projeção estereográfica em dimensão 2

Estamos agora interessados em entender em que tipo de transformações de $\mathbb{R}^n$ são levadas, por projeção estereográfica, as rotações da esfera. Um dos principais motivos é que uma das propriedades distintivas de esferas em dimensões 1 e 2, que nos fazem "entendê-las" tão bem, é que movimentos rígidos do espaço ambiente que fixam o centro da esfera, também fixam a esfera. Isso é óbvio, mas fica menos óbvio quando pensamos em dimensões maiores e temos que nos preocupar com o significado de cada uma das palavras dessa afirmação e pensar se sabemos o que realmente querem dizer. Além disso, como não conseguimos visualizar diretamente n-esferas quando $n > 2$, é importante termos formas indiretas para compreendê-las, uma das quais é entender suas *isometrias*. Discutiremos isometrias em maior detalhe mais adiante. Neste momento, o que faremos é descrever como a ação de $\mathrm{O}(3)$ em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é traduzida para um ação em $\mathbb{R}^2$ pela projeção estereográfica definida pela Equação (1.4.12). Esse caso é especialmente relevante por vários motivos, entre eles porque, por estarmos lidando com $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, ainda podemos visualizar confortavelmente tudo o que acontece. Do ponto de vista prático, é útil poder identificar o plano horizontal com o plano complexo e usar a álgebra de números complexos para nos ajudar, como já fizemos anteriormente. Usaremos, assim, tanto as coordenadas $(z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$, onde $z = x + iy$, quanto $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$, para denotar o mesmo ponto, e referir-nos-emos ao eixo x como o eixo real e ao eixo y como o eixo imaginário, mas o pobre eixo t terá apenas um nome. A fórmula (1.4.12) nesse caso é

$$g(z,t) = \frac{z}{1-t}$$

que, restrita ao eixo z real, é exatamente a fórmula (1.3.4) com y substituído por t. O Exercício 1.3.21 mostra que, se R_θ é uma rotação anti-horária do plano coordenado (x,t), então, a restrição de $g \circ R_\theta \circ g^{-1}$ ao eixo real é dada por

$$g \circ R_\theta \circ g^{-1}(x) = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)x + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\left(-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)x + \cos\frac{\theta}{2}}. \tag{1.4.13}$$

Note que há aqui espaço para confusão, que nos apressamos a explicitar e, com sorte, dirimir. As contas nos Exercício 1.3.21 foram feitas no plano complexo que, no contexto atual, seria o plano com coordenadas $x + it$. O resultado obtido restrito ao eixo real x (que é o eixo real de ambos os planos $x + it$ e $x + iy$) é dado pela Equação (1.4.13) acima, que será agora utilizada para identificar como a rotação R_θ se traduz a uma transformação do plano complexo de coordenada $z = x + iy$. Mas para que isso faça sentido, devemos começar tornando R_θ em uma transformação definida em toda a esfera S^2. Definimos

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Restrita ao plano (x, t), A_θ age como a rotação R_θ. Além disso, cálculos simples mostram que $A_\theta^{\mathrm{T}} A_\theta = I$ e que $\det A_\theta = 1$, isto é, $A_\theta \in \mathrm{SO}(3)$.

Teorema 1.4.9. *Com as definições e notação acima, e definindo* $f_\theta = g \circ A_\theta \circ g^{-1} \colon \mathbb{C} \setminus \{\cot\frac{\theta}{2}\} \to \mathbb{C} \setminus \{-\cot\frac{\theta}{2}\}$*, vale a igualdade*

$$f_\theta(z) = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) z + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\left(-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) z + \cos\frac{\theta}{2}} \tag{1.4.14}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Dos Exercícios 1.4.7 sabemos que g é a restrição à S^2 de uma inversão. Como $A_\theta \in \mathrm{SO}(3)$, dos Exercícios 1.4.5, sabemos que a transformação linear induzida por A_θ é conforme. Podemos assim concluir que f_θ, sendo uma composição de transformações conformes, é também conforme. Além disso, f_θ preserva orientação, já que A_θ preserva orientação e g e g^{-1} revertem orientação. Disso segue que f_θ é uma função analítica complexa. Como vimos, a restrição de f_θ ao eixo real tem a fórmula (1.4.13). Podemos agora invocar um teorema de análise complexa que diz que, se duas funções analíticas coincidem em um conjunto que contém um ponto de acumulação, então elas coincidem em toda a interseção de seus domínios de definição. □

Agora vamos considerar as transformações f_θ e entender melhor como elas agem no plano $\mathbb{C}$. Dados dois pontos $a \neq b \in \mathbb{C}$ e um número real $\rho > 0$, o lugar dos pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem a equação

$$\frac{|z - a|}{|z - b|} = \rho \tag{1.4.15}$$

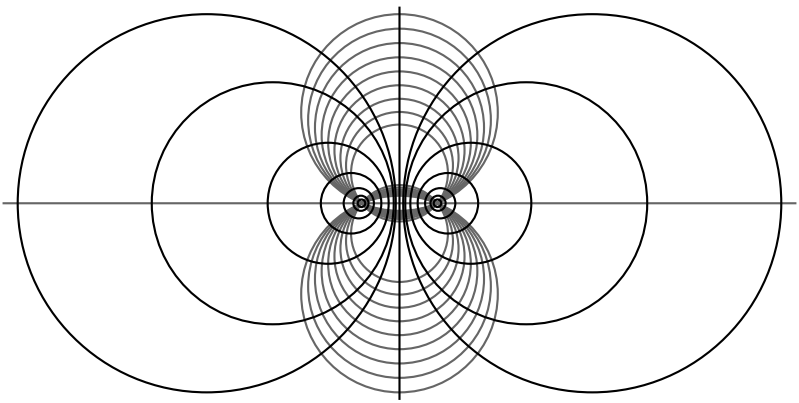


Figura 1.4.2: Círculos de Apolônio em $\mathbb{R}^2$, com focos em $(1,0)$ e $(-1,0)$.

é um círculo, chamado *círculo de Apolônio* com *focos* a, b e constante ρ (desde que façamos como temos feito até aqui e chamemos também de círculo a reta $|z-a| = |z-b|$, bissetora do segmento que une a e b).

Exercícios 1.4.10. a) Prove que os círculos de Apolônio são de fato círculos. *Sugestão:* Considere a transformação linear fracionária

$$w(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

e considere os círculos centrados em 0 no plano w e suas pré-imagens no plano z.

b) Encontre os pontos fixos de f_θ, isto é, as (duas) soluções da equação $f_\theta(z) = z$. Depois disso, lembre-se como obtivemos f_θ e conclua que o resultado era obviamente $\pm i$ e as contas desnecessárias. Calcule a derivada de f_θ nesses dois pontos.

c) Como f_θ é uma transformação linear fracionária, sabemos que f_θ leva cada círculo de Apolônio de focos $\pm i$ em algum círculo. Mostre que, na verdade, f_θ preserva cada um dos círculos desta família. Faça-o de duas maneiras:

- calculando a composição $w \circ f_\theta \circ w^{-1}$, onde w é como no Item a, e
- considerando como f_θ foi obtida de A_θ.

d) Outra família (claramente) preservada por f_θ é a família de círculos que contêm $\pm i$. Como descrever a ação de f_θ nesta família? *Sugestão:* Lembre-se que você calculou a derivada $Df(\pm i)$.

Mostre também que cada círculo desta segunda família é perpendicular a todos os círculos da família anterior. Faça-o, novamente, de duas maneiras, considerando as duas conjugações do Item c.

e) Junte todas essas informações e descreva o que acontece a uma figura plana (um círculo ou um retângulo, por exemplo) sob a ação de f_θ para θ variando em $\mathbb{R}$. Agora pense no que estaria acontecendo com a imagem inversa dessa figura por projeção estereográfica.

Os Exercícios 1.4.10 dão, esperamos, uma boa ideia de como agem certas rotações da esfera S^2 transportadas para o plano por projeção estereográfica. Para nos certificarmos de que esses exemplos são, de certa forma, típicos, deveríamos verificar que outras rotações da esfera transportadas para o plano têm comportamento parecido. Deixamos essa verificação para os Exercícios 1.4.11 abaixo, cuja resolução é menos direta que os exercícios anteriores.

Mencionamos mais de uma vez neste capítulo que, como forma indireta de melhor compreender a 3-esfera, queremos entender o que acontece com objetos dentro dela ao serem levados a $\mathbb{R}^3$ por projeção estereográfica. Acabamos de fazê-lo, só que uma em uma dimensão a menos, ao transportar alguns subconjuntos e rotações da 2-esfera para o $\mathbb{R}^2$ por projeção estereográfica. Por mais interessante que isso seja, parar por aqui seria como "morrer na praia." Nos apressamos em dizer, então, que embora estejamos encerrando aqui a discussão de projeção estereográfica e, com ela, o capítulo, não temos nenhuma intenção de morrer na praia, apenas de descansar um pouco e observar outros aspectos da paisagem antes de voltarmos a este assunto munidos de outras informações. Em particular, teremos, na Seção 2.3.2, um "objeto" extremamente interessante dentro da 3-esfera para contemplarmos sob projeção estereográfica: a chamada *fibração de Hopf*.

Exercícios 1.4.11. a) Mostre que uma matriz $A \in \mathrm{SO}(3)$ pode ser escrita como o produto

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Conclua que a forma geral de uma rotação de S^2 transportada por projeção

estereográfica para o plano é

$$g_{\varphi,\theta,\psi}(z) = \frac{\left(e^{i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}\cos\frac{\theta}{2}\right)z + \left(e^{i\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)}{\left(-e^{i\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)z + \left(e^{-i\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}\cos\frac{\theta}{2}\right)}.$$

c) Estude as transformações $g_{\varphi,\theta,\psi}$, como fizemos com a transformação f_θ, e compare os comportamentos das duas famílias quando variamos os ângulos φ, θ, ψ.

2 Quatérnios e a 3-esfera

Neste capítulo, vamos fazer uma excursão pelo mundo da álgebra, com o objetivo de definir e estudar a *álgebra dos quatérnios* $\mathbb{H}$. Em seguida, veremos que a 3-esfera S^3 é intimamente relacionada aos quatérnios, fazendo um paralelo com a relação entre S^1 e os números complexos $\mathbb{C}$. Assim, pelo menos do ponto de vista algébrico, o melhor análogo da 3-esfera S^3 em dimensão inferior não é a 2-esfera S^2, mas o círculo S^1.

2.1 Definição matricial de números complexos

Para começar a nossa análise, vamos redefinir os números complexos em termos de matrizes. Esta abordagem produz um modelo alternativo de números complexos – diferente do modelo estudado no capítulo anterior, mas equivalente a ele – e possivelmente não tão bem conhecida como outras definições de $\mathbb{C}$. Por isso, achamos útil desenvolver esse ponto de vista um pouco, o que vai motivar e facilitar a construção dos quatérnios na seção seguinte.

Para dois números reais a, b, vamos considerar a matriz

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Com essa notação, podemos definir o conjunto $\mathbb{C}$ dos *números complexos* como

$$\mathbb{C} := \{M_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Como é fácil de verificar (faça-o), somas e produtos de quaisquer elementos de $\mathbb{C}$ pertencem a $\mathbb{C}$ também, o que mostra que $\mathbb{C}$ é um *anel* de matrizes.

Exercício 2.1.1. Verifique que a multiplicação de matrizes em $\mathbb{C}$ é comutativa.

Uma matriz $M_{a,b}$ tem uma inversa se e só se $\det(M_{a,b}) \neq 0$, isto é, se $a^2 + b^2 \neq 0$. Por isso, todos os números complexos diferentes de zero têm inversos dados pela equação

$$M_{a,b}^{-1} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Isso implica que $\mathbb{C}$ tem na verdade a estrutura algébrica de um *corpo*.

Ao mesmo tempo, $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$, pois podemos escrever

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = aM_{1,0} + bM_{0,1}. \qquad (2.1.2)$$

Como é de costume na teoria dos anéis, vamos denotar como 1 a identidade multiplicativa $M_{1,0} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Adicionalmente, vamos definir

$$\mathbf{j} := M_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.1.3)$$

Desse modo, a Equação (2.1.2) dá-nos a decomposição $M_{a,b} = a + b\mathbf{j}$, quase idêntica à notação tradicional "$a + bi$". Em particular, a propriedade fundamental $i^2 = -1$ corresponde à identidade $\mathbf{j}^2 = -1$, que segue diretamente da Equação (2.1.3). Em outras palavras, acabamos recuperando a definição tradicional $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, e toda a teoria de números complexos pode ser desenvolvida nessa notação familiar a partir daqui.

Em termos da nossa abordagem matricial, o módulo de um número complexo satisfaz $|a+bi|^2 = \det(M_{a,b})$, então a multiplicatividade do determinante de matrizes implica imediatamente a multiplicatividade do módulo. Uma consequência bem conhecida desse fato é que o conjunto de números complexos de módulo 1

é fechado sob multiplicação. Geometricamente, esse conjunto é simplesmente o círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Além dessa construção tão bem conhecida, a nossa definição matricial oferece uma nova maneira de pensarmos sobre *o grupo* S^1:

$$S^1 = \{M_{a,b} : \det(M_{a,b}) = 1\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\} \tag{2.1.4}$$

com a operação de produto de números complexos ou produto matricial.

Exercícios 2.1.2. a) A qual operação sobre os números complexos, como discutidos na Seção 1.3.5, corresponde a transposição de matrizes? Explique o que a identidade matricial $(XY)^{\mathrm{T}} = Y^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}$ nos diz sobre os números complexos.

b) Mostre que uma matriz $M_{a,b} \in \mathbb{C}$ satisfaz a equação $M_{a,b}^{\mathrm{T}} M_{a,b} = 1$ se e só se $\det(M_{a,b}) = 1$.

O Item b do exercício acima implica que as matrizes $M_{a,b}$ com determinante igual a 1 são ortogonais, no sentido da Equação (1.4.10).

Teorema 2.1.3. *O grupo* S^1 *é isomorfo ao grupo* SO(2) *de matrizes ortogonais com determinante igual a* 1.

Demonstração. Graças à Equação (2.1.4), podemos associar a cada elemento $z = a + bi \in S^1$ a matriz $M_{a,b}$. Essa matriz satisfaz $\det(M_{a,b}) = a^2 + b^2 = 1$ e, usando o Item b de Exercícios 2.1.2, $M_{a,b}^{\mathrm{T}} M_{a,b} = 1$, então $M_{a,b} \in \mathrm{SO}(2)$. Em outras palavras, construímos um homomorfismo

$$\psi : S^1 \to \mathrm{SO}(2), \qquad \psi(a + bi) = M_{a,b} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1).$$

Vamos agora mostrar que ψ é na verdade um isomorfismo. É obvio que o único elemento $z = a + bi \in S^1$ para o qual $M_{a,b} = 1$ é $z = 1$, então ψ é um monomorfismo.

Seja dada uma matriz qualquer $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$. O nosso objetivo é construir um número complexo $z = a + bi$ para o qual $M_{a,b} = A$. Consideremos os vetores-colunas formados pelas colunas da matriz A,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

Conforme o Item b dos Exercícios 1.4.5, os dois vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são perpendiculares e ambos têm comprimento igual a 1. Graças ao Item a dos Exercícios 1.4.3, sabemos que o vetor $\mathbf{v}_2$ é uma rotação, pelo ângulo de $\pm\frac{\pi}{2}$, do vetor $\mathbf{v}_1$. Se o ângulo de rotação é $+\frac{\pi}{2}$, então obtemos

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{21} \\ a_{11} \end{bmatrix}. \tag{2.1.5}$$

Por isso, a matriz A tem a forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{21} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = M_{a_{11},a_{21}} = \psi(a_{11} + a_{21}i),$$

e a prova é quase concluída – falta considerar apenas um detalhe que deixamos para o exercício abaixo. □

Exercício 2.1.4. Na Equação (2.1.5) da demonstração acima, consideramos apenas o caso do ângulo $\frac{\pi}{2}$ como o ângulo de rotação que relaciona $\mathbf{v}_2$ ao $\mathbf{v}_1$. Mostre que o ângulo de $-\frac{\pi}{2}$ não é permitido.

A importância do Teorema 2.1.3 é que o nosso entendimento geométrico de S^1 aplica-se também ao grupo matricial SO(2) que, sem esse isomorfismo, parecia bem abstrato.

E já que estamos nos acostumando com abstrações relacionando-as a situações "concretas," vejamos mais uma maneira de pensar no grupo S^1 e nos grupos SO(n).

Exercícios 2.1.5. a) Verifique que o determinante de uma matriz induz um homomorfismo entre o grupo multiplicativo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ e o grupo multiplicativo dos reais não nulos. Conclua que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ é um subgrupo normal de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

b) Dê uma descrição de S^1 como o núcleo de um homomorfismo de grupos.

2.2 Definições de quatérnios

Recomendamos fortemente que a leitora não deixe de arregaçar as mangas e pôr a mão na massa nos cálculos com quatérnios a seguir. É possível ler as palavras e compreender o que está sendo dito, mas entender realmente o que são os quatérnios é algo quase físico, que envolve usar as mãos, lápis e papel. Caneta também funciona.

2.2.1 A definição matricial

Tendo definido os números complexos como matrizes reais de dimensão 2×2 na forma dada pela Equação (2.1.1), vamos agora fazer algo semelhante utilizando matrizes com termos *complexos*. Para esse fim, definimos os *quatérnios* como as matrizes da forma

$$M_{z,w} = \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}, \qquad z, w \in \mathbb{C} \tag{2.2.1}$$

e denotamos por $\mathbb{H}$ o conjunto de todos os quatérnios,

$$\mathbb{H} := \{M_{z,w} : z, w \in \mathbb{C}\}.$$

Em particular, se z, w são números *reais*, temos $\overline{z} = z$ e $\overline{w} = w$, então o nosso uso do símbolo $M_{z,w}$ na Equação (2.2.1) é consistente com Equação (2.1.1).

Exercícios 2.2.1 (Estrutura algébrica dos quatérnios)**.**

a) Verifique que somas e produtos dos elementos de $\mathbb{H}$ também pertencem a $\mathbb{H}$. Consulte um livro de álgebra (ou a Wikipédia) para lembrar-se dos axiomas que definem um anel e verifique que eles são satisfeitos por $\mathbb{H}$.

b) $\mathbb{H}$ também tem uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais (mas não, pelo menos por enquanto, sobre $\mathbb{C}$). Refresque a memória novamente e verifique que $\mathbb{H}$ também tem a estrutura de *álgebra associativa sobre* $\mathbb{R}$, isto é, que as estruturas de espaço vetorial e de anel são compatíveis no seguinte sentido: se, $a, b \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathbb{H}$, então

$$(aA)\,(bB) = (ab)(AB).$$

Nos exercícios acima você mostrou que $\mathbb{H}$ é um anel cuja unidade é a matriz identidade: $\mathbf{1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Vejamos agora mais detalhes sobre $\mathbb{H}$ como espaço vetorial real. Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, podemos decompor o quatérnio $M_{z,w}$ da forma seguinte:

$$\begin{aligned} M_{z,w} &= \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix} \\ &= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \\ &= a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

onde usamos a notação

$$\mathbf{i} := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{k} := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2.3}$$

(Note que ela está de acordo com (2.1.3).)

Exercício 2.2.2 (Quatérnios têm dimensão real 4)**.** Verifique que a decomposição acima mostra que $\mathbb{H}$ é um espaço vetorial real de dimensão 4, isto é, que os vetores $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ (já que, por construção, eles geram $\mathbb{H}$).

2.2.2 A definição mais corriqueira

Como acontece com os números complexos, há uma forma "numérica" para quatérnios, que é a mais comumente usada quando são introduzidos. Tratando $\mathbb{H}$ como um espaço vetorial, podemos escrever

$$\mathbb{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}, \tag{2.2.4}$$

onde simplesmente identificamos a expressão $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ à quádrupla ordenada real (a, b, c, d). Poderíamos, então, recomeçar a discussão algébrica da seção anterior e introduzir um produto no conjunto (2.2.4) que, juntamente com a soma da estrutura de espaço vetorial, o torne em um anel. Na verdade, queremos mais: queremos que, além de anel, $\mathbb{H}$ seja uma álgebra associativa sobre $\mathbb{R}$. Para tanto, *declaramos* ser $\mathbf{1}$ a unidade multiplicativa, *definimos* os produtos

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \\ &\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

e estendemos a operação de produto para todo $\mathbb{H}$ de forma que seja linear sobre os reais e seja distributiva em relação à soma.

Exercícios 2.2.3. a) Verifique que as definições acima fazem sentido e mostre que elas tornam $\mathbb{H}$ em um anel não comutativo e em uma álgebra associativa sobre $\mathbb{R}$.

b) Verifique que os dois conceitos de $\mathbb{H}$ que agora temos são, na verdade, equivalentes – isto é, que o $\mathbb{H}$ definido acima e o $\mathbb{H}$ da Seção 2.2.1 são isomorfos tanto como anéis, quanto como álgebras.

Antes de discutirmos mais propriedades dos quatérnios, vamos ajustar a notação para os aproximar da ideia de números e, em particular, para incluir em $\mathbb{H}$, de uma forma específica, o conjunto de números reais. Denotaremos assim o quatérnio $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ simplesmente por $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Verificar que, ao identificar o número real a com o quatérnio $a + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, estamos incluindo $\mathbb{R}$ em $\mathbb{H}$ como um subanel e como uma subálgebra, pode ser matematicamente trivial, mas é educativo. Ao fazê-lo, estamos também imitando, no contexto de quatérnios, o que já fizemos ao identificarmos os números reais com um subconjunto específico dos números reais, fazendo $a = a + 0i$. O número real a é, claramente, chamado da *parte real* do quatérnio $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Chegamos assim à forma mais corriqueira de todas de definir quatérnios:

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}. \tag{2.2.6}$$

Usaremos a seguir a correspondência

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow \quad M_{\mathbf{q}} = M_{a+ib,c+id} &= \begin{bmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

que é, afinal, simplesmente o isomorfismo dos Exercícios 2.2.3. Como já começamos a fazer, vamos nos referir à forma da esquerda como a *forma numérica* do quatérnio $\mathbf{q}$; a forma da direita é, obviamente, sua *forma matricial*.

Ao contrário de $\mathbb{R}$, para o qual há uma inclusão *canônica* em $\mathbb{H}$, como acabamos de descrever, veremos a seguir que os números complexos podem ser incluídos em $\mathbb{H}$ de um número infinito de maneiras diferentes, sem que nenhuma delas seja mais "canônica" que as outras.

2.2.3 Propriedades dos quatérnios

Para entender melhor os quatérnios, vejamos algumas de suas propriedades. Começamos observando novamente que as equações (2.2.5) definem um produto que claramente *não é comutativo* em geral, de forma que $\mathbb{H}$ não é um corpo. Apesar disso, $\mathbb{H}$ tem uma das caraterísticas marcantes de um corpo: cada quatérnio não nulo tem um inverso multiplicativo. Estruturas algébricas com todas propriedades de um corpo exceto a comutatividade de multiplicação são conhecidas como *anéis de divisão*. Para ver que $\mathbb{H}$ é um anel de divisão, ponha $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ e verifique (não deixe para depois) a seguinte igualdade básica

$$(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \cdot (a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R} \tag{2.2.8}$$

que, por sua vez, implica

$$(a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) \cdot (a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Essas igualdades são tão importantes que merecem ser vistas novamente. Verifique a forma matricial da Equação (2.2.8):

$$\begin{bmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a-ib & c+id \\ -c+id & a+ib \end{bmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.9)$$

A igualdade da Equação (2.2.8) tem como consequência imediata que, se $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ (isto é, se o número real $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ tem um inverso multiplicativo), então o quatérnio $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ tem um inverso multiplicativo que é

$$\mathbf{q}^{-1} = \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\right) \cdot (a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}). \quad (2.2.10)$$

Essas observações convidam-nos a fazer algumas definições importantes. A *norma* do quatérnio $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, onde a, b, c, d são, claro, números reais, é o número

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \in [0, \infty), \quad (2.2.11)$$

que corresponde à norma euclidiana do vetor (a, b, c, d) no espaço $\mathbb{R}^4$ e que é estritamente positiva a menos que $\mathbf{q} = 0$. O *conjugado* do quatérnio $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ é o quatérnio $\overline{\mathbf{q}} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$. Com essas definições, as Equações (2.2.8) e (2.2.10) tornam-se em

$$\mathbf{q} \cdot \overline{\mathbf{q}} = \|\mathbf{q}\|^2, \qquad \mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \cdot \overline{\mathbf{q}},$$

análogas às igualdades $z\bar{z} = |z|^2$ e $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ para os números complexos.

Um quatérnio $\mathbf{q}$ é um número real, chamado *quatérnio real*, se e somente se $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$. Por outro lado, um quatérnio cuja parte real é 0, quer dizer, um quatérnio da forma $\mathbf{q} = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, é chamado um *quatérnio puro*. Note que cada quatérnio puro $\mathbf{q}$ satisfaz $\overline{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}$.

Vejamos agora como as definições de norma e de conjugação de quatérnios se comportam do ponto de vista matricial.

Exercícios 2.2.4. Sejam $z = a + ib$ e $w = c + id$ (com a, b, c, d reais, como sempre) e $M_{z,w} = M_{\mathbf{q}}$ correspondente ao quatérnio $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ por (2.2.7). Verifique as seguintes afirmações:

a) A norma de $\mathbf{q}$ satisfaz
$$\|\mathbf{q}\|^2 = \det\big(M_{z,w}\big). \tag{2.2.12}$$

b) A norma de quatérnios é multiplicativa, isto é, para quaisquer $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$, vale
$$\|\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| \cdot \|\mathbf{q}\|.$$

c) A forma matricial do quatérnio conjugado $\overline{\mathbf{q}}$ é
$$\big(M_{z,w}\big)^* = \begin{bmatrix} \bar{z} & w \\ -\bar{w} & z \end{bmatrix}.$$

d) Valem as igualdades
$$\big(M_{z,w}\big)^* \cdot M_{z,w} = M_{z,w} \cdot \big(M_{z,w}\big)^* = \big(|z|^2 + |w|^2\big)\, I$$
onde I é a matriz identidade 2×2. (Compare com a Equação (2.2.9).)

Tendo visto as propriedades básicas de quatérnios em ambas as formas numérica e matricial, listamos no próximo exercício algumas propriedades adicionais que serão úteis no que segue. Ao invés de prová-las duas vezes, passamos, a partir de agora, a tratar as formas numérica e matricial como maneiras alternativas de ver o mesmo quatérnio e usamos a forma que for mais conveniente para cada situação.

Exercícios 2.2.5. a) Mostre que $\overline{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}} \cdot \overline{\mathbf{p}}$. *Sugestão:* Use a forma matricial.

b) Mostre que um quatérnio $\mathbf{q}$ é puro se e só se $\mathbf{q}^2$ é real não positivo. Neste caso, o que é $\mathbf{q}^2$?

c) Verifique que todo quatérnio pode ser escrito na *forma polar* $\mathbf{q} = t\mathbf{u}$, onde $t \geqslant 0$ e $\mathbf{u}$ é um quatérnio *unitário*, isto é, $\|\mathbf{u}\| = 1$.

d) Verifique também que todo quatérnio unitário $\mathbf{u}$ pode ser escrito na forma $\mathbf{u} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{p}$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\mathbf{p}$ é um quatérnio unitário puro, isto é, $\mathbf{p} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ e $u, v, w \in \mathbb{R}$ satisfazem $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.

e) O *centro* $Z(G)$ de um grupo G é o subgrupo de G formado pelos elementos que comutam com *todos* os elementos de G, isto é,

$$Z(G) = \{h \in G : \forall g \in G \; gh = hg\}.$$

É claro que $Z(G)$ é normal em G. Mostre que o conjunto de quatérnios reais diferentes de zero é o centro do grupo multiplicativo $\mathbb{H} \setminus \{0\}$.

Como já mencionamos (em particular, como consequência do Item e acima), o corpo $\mathbb{R}$ dos reais forma um subanel comutativo de $\mathbb{H}$. De modo análogo, podemos mergulhar os números complexos dentro de $\mathbb{H}$, por exemplo, realizando cada número $a+bi \in \mathbb{C}$ como o quatérnio $a+b\mathbf{i} \in \mathbb{H}$. Mas não há razão nenhuma para escolhermos o elemento $\mathbf{i}$ como a imagem de $i \in \mathbb{C}$, que $\mathbf{j}$ ou $\mathbf{k}$ seriam escolhas igualmente boas. O exercício abaixo mostra que, na verdade, existe um número infinito de maneiras em que os números complexos podem ser realizados como um subanel de $\mathbb{H}$.

Exercícios 2.2.6. a) Seja $\mathbf{p}$ um quatérnio unitário puro, isto é, $\mathbf{p} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, onde u, v, w são números reais satisfazendo $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Mostre que a transformação $\mathbb{R}$-linear

$$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{H}, \qquad \phi(a + bi) = a + b\mathbf{p} \tag{2.2.13}$$

define um homomorfismo injetivo de álgebras reais.

b) Verifique que todos homomorfismos injetivos de álgebras reais $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ têm a forma dada na Equação (2.2.13).

2.3 Os quatérnios e a 3-esfera

2.3.1 A 3-esfera como um grupo

A multiplicatividade da norma dos quatérnios, estabelecida nos Exercícios 2.2.4, implica que a função norma

$$\|\cdot\| : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad \mathbf{q} \mapsto \|\mathbf{q}\|$$

é um homomorfismo entre o grupo multiplicativo dos quatérnios não nulos e o grupo multiplicativo dos reais positivos. Em particular, seu núcleo, isto é, o conjunto de todos os quatérnios de norma 1, que chamamos de quatérnios *unitários*,

é um subgrupo normal do grupo multiplicativo dos quatérnios. Mas este núcleo é, a esta altura, a nossa velha conhecida:

$$\begin{aligned} S^3 &= \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4 : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \\ &= \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \|\mathbf{q}\| = 1\}. \end{aligned}$$

Aqui estamos usando a definição da Equação (1.1.1), identificando o espaço $\mathbb{R}^4$ de coordenadas a, b, c, d com $\mathbb{H}$ por meio de (2.2.4).

Exercício 2.3.1. Verifique as afirmações acima em detalhe e assegure-se de que S^3 satisfaz todas as condições na definição de um grupo (não comutativo).

Chegamos assim a uma forma de entender a 3-esfera que pode não ser visual, como fizemos com S^2, mas é operacional, algo que não podemos fazer com S^2. Assim, por exemplo, os oito quatérnios $\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}$ nos "eixos coordenados" podem ser multiplicados e formam um subgrupo de oito elementos de S^3. Esse é apenas um exemplo simples, e usaremos muito mais essa estrutura de grupo em S^3 a seguir.

Vamos agora estabelecer uma interpretação matricial da 3-esfera como grupo. Primeiro, vamos lembrar de que o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ é equipado com a *forma hermitiana canônica* (nome chique para *produto escalar complexo*) dada por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \tag{2.3.1}$$

onde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Em geral, a operação sobre matrizes complexas que faz o papel análogo à transposta de matrizes reais é a *conjugada transposta*: se A é uma matriz complexa, sua conjugada transposta é $A^* := \overline{A^{\mathrm{T}}}$. Fazendo uso do mantra "vetores devem, quando possível, ser considerados como vetores coluna" que mencionamos anteriormente, temos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

e a redefinição do produto escalar (2.3.1), análoga à Equação (1.4.6), é

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \mathbf{x}. \tag{2.3.2}$$

Note que, se $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ são vetores reais, então as Equações (1.4.6) e (2.3.2) coincidem. Exatamente como o produto escalar real, o produto escalar complexo tem a agradável propriedade $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$ (e $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = 0$), que nos permite definir

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Por outro lado, é bom notar que este produto escalar não é comutativo:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Isto quer dizer que a linearidade vale para a primeira variável em $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, mas tem que ser modificada para a segunda, mas como?

Uma matriz quadrada A com entradas complexas é chamada *unitária* se $A^* A = AA^* = I$, onde I denota a matriz identidade. O conjunto de todas as matrizes unitárias $n \times n$ é tradicionalmente denotado $\mathrm{U}(n)$:

$$\mathrm{U}(n) = \{A \text{ matriz complexa } n \times n : A^* A = AA^* = I\}.$$

Matrizes unitárias são exatamente as que preservam a forma hermitiana, ou seja, uma matriz $n \times n$ A é unitária se e só se

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n. \tag{2.3.3}$$

Exercícios 2.3.2. a) Verifique a afirmação acima, mostrando que A satisfaz (2.3.3) se e somente se $A \in \mathrm{U}(n)$.

b) Mostre que o conjunto $\mathrm{U}(n)$ forma um grupo com a operação de multiplicação de matrizes.

c) Mostre que se $A \in \mathrm{U}(n)$, então $\det A$ é um número complexo de valor absoluto 1.

O grupo $\mathrm{U}(n)$ é o análogo complexo do grupo real $\mathrm{O}(n)$ e, como no caso real, $\mathrm{U}(n)$ tem um subgrupo importante, que é especialmente relevante no presente contexto:

$$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{U}(n) : \det A = 1\}.$$

Exercício 2.3.3. Mostre que $\mathrm{SU}(n)$ é um subgrupo normal de $U(n)$. *Sugestão:* Use o homomorfismo det.

Chegamos assim a uma forma algébrica importante de entender a 3-esfera.

Teorema 2.3.4. *O grupo S^3 de quatérnios de norma* 1 *é isomorfo ao grupo* SU(2) *de matrizes unitárias* 2×2 *de determinante* 1.

Demonstração. O quatérnio $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ corresponde à matriz complexa

$$M_{a+bi,\, c+di} = \begin{bmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{bmatrix}.$$

Da Equação (2.2.12), sabemos que $\|\mathbf{q}\| = 1$ se e só se $\det\big(M_{a+bi,\, c+di}\big) = 1$. Por outro lado, dos Exercícios 2.2.4, sabemos que

$$(M_{a+bi,\, c+di})^*(M_{a+bi,\, c+di}) = I \iff a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (2.3.4)$$

Isto é, a matriz $M_{a+bi,\, c+di}$ é unitária e tem determinante igual a 1 se e somente se $\|\mathbf{q}\| = 1$. Assim obtemos um homomorfismo de grupos

$$\psi : S^3 \to \mathrm{SU}(2), \quad \psi(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = M_{a+bi,\, c+di}.$$

Obviamente, $M_{a+bi,\, c+di} = I$ implica $a = 1$ e $b = c = d = 0$, então o homomorfismo ψ é injetivo. Para verificar que ψ é também sobrejetivo, consideremos uma matriz complexa $A \in \mathrm{SU}(2)$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

É preciso construirmos agora um quatérnio $\mathbf{q}$ de norma 1 para o qual $\psi(\mathbf{q}) = A$, sendo o candidato óbvio

$$\mathbf{q} = \mathrm{Re}(z_{11}) + \mathrm{Im}(z_{11})\mathbf{i} + \mathrm{Re}(z_{21})\mathbf{j} - \mathrm{Im}(z_{21})\mathbf{k}. \quad (2.3.6)$$

Dado que este último passo da demonstração é completamente análogo à demonstração do Teorema 2.1.3, vamos completá-lo por meio dos Exercícios 2.3.5 abaixo. □

Exercícios 2.3.5. a) A forma esperada do quatérnio $\mathbf{q}$ dada em (2.3.6) sugere que a matriz unitária A deve ser completamente determinada pela sua primeira coluna. Denotando por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ as duas colunas de A, calcule os valores dos produtos escalares hermitianos $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle$.

b) Use o item anterior e a hipótese $\det A = 1$ para mostrar que $A = M_{z,w}$, onde $z = z_{11}$ e $w = \overline{z_{21}}$.

2.3.2 A 3-esfera como união de círculos

Nesta seção veremos, como uma primeira volta de um parafuso ao qual daremos outras voltas mais tarde, que é possível descrever a 3-esfera S^3 como uma união de círculos unitários. Mais tarde, veremos também que S^3 se decompõe em uma união de toros bidimensionais, assim como uma cebola é união de camadas concêntricas. A analogia com a cebola é útil, mas não é muito literal, já que há mais de um tipo de camada e, apesar delas serem, de fato, concêntricas, não será assim que aparecerão aos nossos olhos por projeção estereográfica. Mas, ao invés de explicar as limitações da analogia, passemos logo à descrição matemática do que queremos dizer.

Começamos tornando os quatérnios em um espaço vetorial complexo. Seria tentador fazê-lo usando a forma matricial dos quatérnios, mas isso não funciona: embora a soma de matrizes da forma $M_{z,w}$ seja uma matriz desta mesma forma,

$$M_{z_1,w_1} + M_{z_2,w_2} = M_{z_1+z_2,w_1+w_2},$$

o mesmo *não vale* para multiplicação usual da matriz $M_{z,w}$ pelo escalar complexo $\lambda \in \mathbb{C}$: em geral,

$$\lambda M_{z,w} \neq M_{\lambda z,\lambda w}$$

embora, como já vimos, valha a igualdade se $\lambda \in \mathbb{R}$. Mas ter escrito a inequação acima indica-nos exatamente o que fazer: *definimos*

$$\Phi\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{H}, \quad \Phi(z,w) = M_{z,w} \tag{2.3.7}$$

e *declaramos* que é a estrutura de espaço vetorial complexo induzida por Φ que queremos considerar em $\mathbb{H}$, isto é, definimos o produto do escalar complexo $\lambda \in \mathbb{C}$ pelo quatérnio $M_{z,w}$ como

$$\lambda \cdot M_{z,w} := M_{\lambda z,\lambda w}. \tag{2.3.8}$$

Sublinhamos que este produto é *diferente* do produto ordinário de um escalar por uma matriz.

Exercícios 2.3.6. a) Verifique que o produto (2.3.8) e a adição habitual de matrizes tornam $\mathbb{H}$ em um espaço vetorial complexo e que Φ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

b) A tradução do produto por escalar complexo para a forma numérica de quatérnios é feita da seguinte forma. Note que podemos escrever

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = (a + b\mathbf{i}) + (c + d\mathbf{i})\mathbf{j}.$$

Mostre que

$$(x + yi) \cdot \mathbf{q} = (x + y\mathbf{i})\mathbf{q}.$$

c) Conclua, em particular, que $\|\lambda \cdot \mathbf{q}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{q}\|$.

Chegamos assim à seguinte observação, algo ingênua, mas com consequências geométricas extraordinárias. Tomando $\lambda = e^{it}$, com $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\|e^{it} \cdot \mathbf{q}\| = \|\mathbf{q}\|$$

e, em particular, se $\|\mathbf{q}\| = 1$, então $\|e^{it} \cdot \mathbf{q}\| = 1$. Isto é, $S^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ é invariante por multiplicação por e^{it}. Vejamos o que tal produto faz com os pontos de S^3.

Exercícios 2.3.7. As seguintes observações seguem facilmente das propriedades da estrutura de espaço vetorial complexo de $\mathbb{H}$ e da estrutura de grupo de S^3: verifique-as. Aqui $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ e $s, t \in \mathbb{R}$.

a) $e^{it} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}$ se e só se t é um múltiplo inteiro de 2π.

b) $e^{i(s+t)} \cdot \mathbf{q} = e^{is} \cdot \left(e^{it} \cdot \mathbf{q}\right)$.

c) Se $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, então $e^{it} \cdot \mathbf{p} \neq e^{it} \cdot \mathbf{q}$.

Uma maneira de formalizar esses resultados é definir

$$\varphi \colon \mathbb{R} \times S^3 \to S^3, \quad \varphi\,(t, \mathbf{q}) = e^{it} \cdot \mathbf{q}. \tag{2.3.9}$$

Os Exercícios 2.3.7 provam então que φ é um *fluxo*, isto é, φ é uma aplicação contínua e tem as seguintes propriedades:

i) $\varphi(0, \mathbf{q}) = \mathbf{q}$,

ii) $\varphi(s + t, \mathbf{q}) = \varphi\,(s, \varphi(t, \mathbf{q}))$, para todos $s, t \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.3.8. Para $t \in \mathbb{R}$ fixado, definamos $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$. Mostre que as propriedades acima implicam que φ_t é um homeomorfismo. Se assim o desejar, mostre que φ é um difeomorfismo, isto é, que ambos $\varphi_t^{\pm 1}$ são diferenciáveis.

O fluxo $\varphi(t, \mathbf{q}) = e^{it} \cdot \mathbf{q}$ é importante e tem um nome bem conhecido: é o *fluxo de Hopf*. Contudo mais importante que sabermos que definimos um fluxo em S^3, e que este fluxo tem o nome de um famoso matemático do século passado, é entendermos as implicações geométrico-topológicas da existência de φ. Os conjuntos $\{\varphi(t, \mathbf{q}) : t \in \mathbb{R}\}$ são chamados *órbitas* do fluxo φ. Os Exercícios 2.3.7 mostram que essas órbitas são curvas fechadas simples e disjuntas. Mais precisamente, o Item a mostra que as funções $t \mapsto \varphi(t, \mathbf{q})$ são periódicas, de período 2π, para todo $\mathbf{q} \in S^3$, e os Itens b e c mostram que duas órbitas ou são iguais ou não se intersectam. Assim, o fluxo de Hopf pode ser pensado como um movimento conjunto de todos os pontos de S^3, parametrizado pelo "tempo" t, de forma que cada ponto $\mathbf{q}$ se move ao longo de sua órbita, com todos os pontos voltando à posição original após tempo 2π, e não havendo nunca colisões entre órbitas distintas ou entre pontos da mesma órbita. Em particular, as órbitas do fluxo decompõem a 3-esfera em curvas fechadas disjuntas, nenhuma das quais se reduz a um único ponto. E aqui já podemos observar uma diferença fundamental entre S^2 e S^3: é um teorema de topologia que, sempre que tentamos construir um fluxo (diferenciável) na 2-esfera, haverá órbitas triviais, isto é, que se reduzem a um único ponto.

Até aqui mencionamos apenas características topológicas das órbitas do fluxo de Hopf: suas órbitas são curvas fechadas, sem autointerseção e não degeneradas, e decompõem a esfera em conjuntos disjuntos. Vejamos agora propriedades geométricas dessas órbitas.

Seja $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tal que $|z|^2 + |w|^2 = 1$. O conjunto

$$W = \{\lambda \cdot (z, w) \in \mathbb{C}^2 : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

é um subespaço linear complexo de dimensão (complexa) 1 em $\mathbb{C}^2$ que é transportado, pelo isomorfismo definido em (2.3.7), em um subespaço linear complexo de $\mathbb{H}$. A imagem de W é $\{\lambda \cdot \mathbf{q} \in \mathbb{H} : \lambda \in \mathbb{C}\}$, onde $\mathbf{q}$ é o quatérnio com a forma matricial $M_{z,w}$. Como $\|\lambda \cdot \mathbf{q}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{q}\| = |\lambda|$, já que $\|\mathbf{q}\| = |z|^2 + |w|^2 = 1$, a interseção entre o subespaço W e a 3-esfera é

$$W \cap S^3 = \{\lambda \cdot \mathbf{q} \in \mathbb{H} : \lambda \in \mathbb{C}\} \cap S^3 = \{e^{it} \cdot \mathbf{q} : t \in \mathbb{R}\}$$

isto é, essa interseção é a órbita de $\mathbf{q}$ pelo fluxo de Hopf. Assim acabamos de estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 2.3.9. *Todas as órbitas do fluxo de Hopf na 3-esfera S^3 têm a forma $W \cap S^3$, onde W é um subespaço unidimensional complexo de $\mathbb{H}$. Reciprocamente, cada interseção $W \cap S^3$ determina uma única órbita do fluxo de Hopf.*

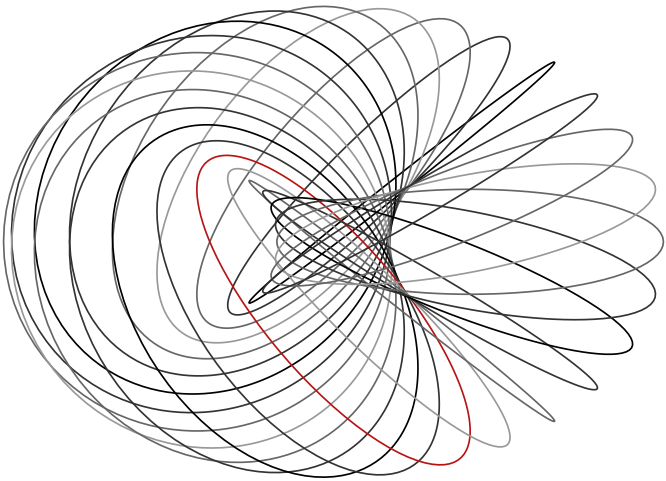


Figura 2.3.1: A imagem sob a projeção estereográfica de círculos de Hopf da forma $\{e^{it}(z,w) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ para certos valores de (z,w) com $|z| = r$, onde $0 < r < 1$ está fixo.

Como cada subespaço unidimensional complexo é também um subespaço bidimensional *real*, vemos que as órbitas do fluxo de Hopf são interseções de subespaços lineares de dimensão real 2 com S^3 e são, portanto, *círculos máximos* em S^3 – círculos cujos centros coincidem com o centro de S^3 (isto é, a origem). Chegamos assim a uma segunda diferença radical entre S^2 e S^3: enquanto em S^2 *quaisquer* dois círculos máximos intersectam-se em exatamente dois pontos, é possível decompor *toda* a esfera S^3 em círculos máximos *disjuntos*. Essa decomposição tem também um nome bem conhecido: chama-se a *fibração de Hopf*.

Quanto aos aspectos geométricos do fluxo de Hopf, as suas órbitas correspondem, em $\mathbb{C}^2$, a conjuntos da forma $\{e^{it}(z,w) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{R}\}$, onde $z, w \in \mathbb{C}$ são tais que $|z|^2 + |w|^2 = 1$. Fazendo $|z|^2 = r^2$, para $0 \leqslant r \leqslant 1$, segue que $|w|^2 = 1 - r^2$, e, assumindo por um momento que $r \neq 0, 1$, os conjuntos $\{e^{it}z : t \in \mathbb{R}\}$ e $\{e^{it}w : t \in \mathbb{R}\}$ são círculos em $\mathbb{C}$ de raios r e $\sqrt{1-r^2}$, respectivamente.

Por sorte, o Capítulo 1 permite-nos não apenas descrever em palavras como o fluxo de Hopf decompõe S^3, mas também ver a imagem, por projeção estereográfica, da fibração de Hopf em nosso espaço, o $\mathbb{R}^3$. A Figura 2.3.1 mostra a projeção estereográfica de alguns círculos de Hopf com $|z| = r$ fixo. Aos nossos olhos, os círculos não aparecem, absolutamente, concêntricos: de fato não o são.

Aliás, sequer é completamente claro que as curvas que vemos na Figura 2.3.1 são de fato círculos euclidianos, mas, desde que acreditemos que a figura foi feita por projeção estereográfica de S^3 em $\mathbb{R}^3$, essas curvas, sendo projeções de círculos, são, portando, círculos.

Em geral, e ao contrário do que acontece em $\mathbb{R}^4$ ($\cong \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H}$), onde todos os círculos de Hopf têm o mesmo centro e o mesmo raio, sob a inversão cuja restrição a S^3 é a projeção estereográfica, centros dos círculos são espalhados pelo $\mathbb{R}^3$ e raios mudam. Um dos círculos, inclusive, passa a ter "raio infinito", isto é, torna-se uma reta: há exatamente um círculo de Hopf que passa pelo polo norte $(0,0,0,1) \in S^3$ e, como este ponto é levado ao ponto no infinito pela projeção estereográfica, o círculo de Hopf que o contém é levado a uma reta. Se tivesse sido incluída na Figura 2.3.1, esta reta passaria pelo centro da figura na direção vertical.

Tomamos a liberdade de fazer um desvio para comentar parte da paisagem matemática que é, neste momento, tangencial, mas que reaparecerá a seguir. A análoga bidimensional "correta" da decomposição da 3-esfera em círculos (1-esferas) máximos é, talvez, a decomposição da 2-esfera em 0-esferas máximas, isto é, em pares de pontos antipodais de S^2. Deste ponto de vista, não há nada surpreendente: é claramente e perfeitamente possível decompor a 2-esfera em 0-esferas máximas disjuntas. De fato, essa construção bem conhecida em matemática levanos aos *espaços projetivos*, que voltarão a aparecer em nosso caminho (veja, em particular, a Definição 2.5.3). Em geral, o espaço projetivo associado a um espaço vetorial é o quociente pela relação de equivalência que identifica dois vetores não nulos se um deles é múltiplo do outro. Quando o espaço vetorial em questão é o $\mathbb{R}^n$, podemos sempre multiplicar vetores não nulos por um escalar positivo para obter um vetor na esfera unitária. Para obter a projetivização de $\mathbb{R}^n$, basta, portanto, primeiro passar a esfera S^{n-1} tomando múltiplos positivos e, em seguida, identificar pontos antipodais, isto é, pontos que diferem por multiplicação por ± 1. Então concluímos que, pelo menos do ponto de vista topológico, podemos definir o espaço projetivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, projetivização de $\mathbb{R}^n$, como o quociente de S^{n-1} pela identificação de pontos antipodais.

2.3.3 Decomposição da 3-esfera em toros e círculos

Olhando com cuidado a Figura 2.3.1 é possível, se não observar inequivocamente, ao menos desconfiar que os círculos lá desenhados estão todos contidos em um mesmo toro de revolução em $\mathbb{R}^3$. Na verdade, se aplicássemos a projeção estereográfica a *todas* as órbitas da forma $\{e^{it}(z,w) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{R} \text{ e } |z| = r\}$ para

um $r \in (0,1)$ fixo, as imagens delas formariam um toro completo em $\mathbb{R}^3$. Para verificar que a Figura 2.3.1 não mente, vamos agora voltar à 3-esfera e lá construir os toros.

Fixe um valor de $r \in (0,1)$ e seja $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ um ponto tal que $|z|^2 = r^2$ e $|w|^2 = 1 - r^2$. Como a multiplicação pelo número complexo e^{it} preserva o módulo, a órbita $\{e^{it}(z,w) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ é contida no toro bidimensional

$$\{|z_1| = r\} \times \left\{|z_2| = \sqrt{1-r^2}\right\} \subset \mathbb{C}^2. \tag{2.3.10}$$

Fazendo z e w variarem em cada um dos círculos do produto da Equação (2.3.10), vemos que esse toro é todo preenchido, ou *folheado*, por órbitas do fluxo de Hopf. Além disso, é claro que cada uma dessas órbitas dá exatamente uma volta em cada direção do toro antes de fechar-se. Esses toros têm nome: são chamados *toros de…* (adivinhe).

Quando $r = 0$ ou $r = 1$, os toros (2.3.10) degeneram-se em círculos e, para r variando em $(0,1)$, eles "interpolam" esses dois círculos, passando de toros muito próximos ao círculo $\{(0,z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_2| = 1\}$ a toros muito próximos ao círculo $\{(z_1,0) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| = 1\}$. A Figura 2.3.2 mostra alguns destes toros sob a projeção estereográfica, juntamente com alguns dos círculos de Hopf neles contidos.

Então chegamos à descrição completa da analogia com a cebola, com a qual começamos esta discussão (e que teria sido mais precisa se tivéssemos dito que era uma cebola ao quadrado). A 3-esfera é decomposta de duas maneiras: primeiro, em camadas, parametrizadas por $r \in [0,1]$, cada uma das quais é um toro bidimensional, exceto nos extremos, quando $r = 0$ ou $r = 1$ e os toros se tornam em círculos; segundo, em círculos que folheiam cada um dos toros da primeira decomposição. As camadas de ambos os tipos são todas concêntricas, em certo sentido, já que ou são de fato círculos máximos, cujo centro é a origem de $\mathbb{R}^4$, ou são folheadas por tais círculos máximos. Ao contrário da cebola, no entanto, cujas camadas se aproximam do centro, todos os círculos de Hopf têm o mesmo raio (igual a 1).

Como os círculos de Hopf dão uma volta em cada uma das direções coordenadas de cada toro de Hopf, chamadas "longitudinal" e "meridional" (por assim dizer, embora não haja qualquer motivo conceitual para distinguir qual nome usar para qual direção), o mesmo acontece na imagem da fibração sob a projeção estereográfica, na qual os toros de Hopf se tornam toros de revolução em $\mathbb{R}^3$, como se vê na Figura 2.3.2 e como provaremos a seguir. Em geral, círculos geométricos de "tipo $(1,1)$" (isto é, que dão uma volta em cada uma das direções meridional e

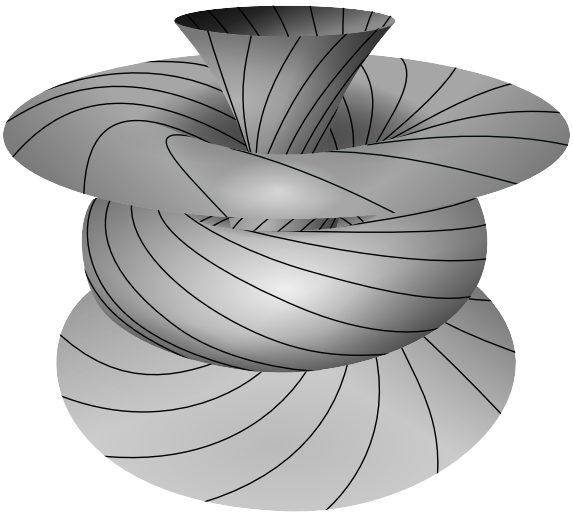


Figura 2.3.2: Círculos de Hopf e os toros folheados por eles. Imagem baseada na Figura 2.31 do livro de Thurston (1997).

longitudinal), contidos em toros de revolução[1] em $\mathbb{R}^3$, são chamados *círculos de Villarceau*.

Vejamos agora um passo a passo de como entender em detalhe essas afirmações sobre a imagem, contida na Figura 2.3.2, da fibração de Hopf, mas, antes disso, vejamos, em um exercício de geometria espacial, como obter círculos de Villarceau.

Exercício 2.3.10. Considere a Figura 2.3.3. Escreva a equação do toro de revolução (ao redor do eixo z) que contém os dois círculos. Escreva também a equação do plano que contém a reta tangente aos dois círculos (mostrada na figura) e o eixo x (perpendicular ao plano da figura). Calcule a interseção das duas equações e mostre que se trata da união de dois círculos.

Nos Exercícios 1.4.7, vimos que a fórmula para a projeção estereográfica que leva a esfera unitária $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ é

$$g(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)\mathbf{x}$$

[1] Rotação; nenhuma incitação à subversão aqui.

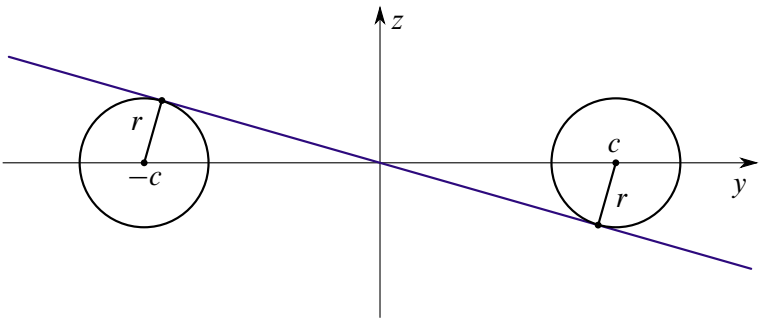


Figura 2.3.3: Rotação dos dois círculos ao redor do eixo z produz um toro de revolução. Como mostra o Exercício 2.3.10, o plano perpendicular à página contendo a reta na figura intersecta esse toro em dois círculos, chamados *círculos de Villarceau*.

e que g é a restrição a S^n da inversão na n-esfera centrada em $(\mathbf{0}, 1)$ de raio $\sqrt{2}$. Façamos agora algumas observações simples, mas úteis.

- Como inversões preservam planos (de qualquer dimensão) que contêm o centro da esfera de inversão, qualquer k-plano coordenado de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contenha o eixo t é g-invariante.

- Como a interseção da n-esfera com um k-plano coordenado é a $(k-1)$-esfera unitária naquele k-plano, a restrição de g a qualquer k-plano coordenado que contenha o eixo t é a projeção estereográfica definida na $(k-1)$-esfera daquele k-plano. (O que acontece com a aplicação g restrita a planos coordenados que não contenham o eixo t?)

- Se $A \in \mathrm{O}(n)$, então $(\mathbf{x}, t) \in S^n$ se e só se $(A\mathbf{x}, t) \in S^n$ (por quê?). Portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} A \circ g(\mathbf{x}, t) &= A\left(\left(\frac{1}{1-t}\right)\mathbf{x}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1-t}\right) A\mathbf{x} \\ &= g(A\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

  Se $A' \in \mathrm{O}(n+1)$ é a matriz que age como A em $\mathbb{R}^n$ e é a identidade na coordenada t, isto é,

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2.3.12}$$

então (2.3.11) torna-se

$$A \circ g(\mathbf{x}, t) = g\,(A\mathbf{x}, t) = g \circ A'(\mathbf{x}, t). \tag{2.3.13}$$

- Assim, se $T \subset S^n$ é um subconjunto A'-invariante, isto é, $(\mathbf{x}, t) \in T \iff A'(\mathbf{x}, t) = (A\mathbf{x}, t) \in T$, a Equação (2.3.13) diz-nos que, para obter a projeção $g\,(A'(\mathbf{x}, t))$, podemos primeiro projetar para obter $g(\mathbf{x}, t)$ e depois multiplicar por A para obter $A\,(g(\mathbf{x}, t))$.

Seja então, para $0 \leqslant r \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} T_r &= \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 = r^2,\ |w|^2 = 1 - r^2\right\} \\ &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = r^2,\ z^2 + t^2 = 1 - r^2\right\} \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

e seja

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

isto é, $A_\theta \in \mathrm{O}(3)$ é a matriz de rotação por ângulo θ no plano xy (ou seja, ao redor do eixo z). Neste caso, a matriz A'_θ, definida como na Equação (2.3.12), pode ser descrita usando as mesmas palavras fora dos parênteses, mas $A'_\theta \in \mathrm{O}(4)$. Como seria a descrição correspondente à descrição em parênteses?

Exercício 2.3.11. Verifique que T_r é A'_θ-invariante.

Vamos usar uma tripla como subíndice para indicar que estamos nos restringindo a um subespaço coordenado de $\mathbb{R}^4$. Assim, por exemplo, $\mathbb{R}^3_{(x,z,t)}$ é o hiperplano coordenado $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = 0\}$ e $S^2_{(x,z,t)}$ é a 2-esfera (unitária centrada na origem, como sempre quando usamos a notação S^n) em $\mathbb{R}^3_{(x,z,t)}$. Com essa notação, temos

$$\begin{aligned} K_r := T_r \cap \mathbb{R}^3_{(x,z,t)} &= \left\{(x, 0, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 = r^2,\ z^2 + t^2 = 1 - r^2\right\} \\ &= S^2_{(x,z,t)} \cap \{(x, z, t) \in \mathbb{R}^3_{(x,z,t)} : x = \pm r\} \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

de modo que, para $r \neq 0, 1$, K_r é a união de dois círculos obtidos intersectando a esfera $S^2_{(x,z,t)}$ com os planos $\{x = \pm r\}_{(x,z,t)}$; enquanto que, para $r = 0$, K_r é o círculo máximo obtido intersectando $S^2_{(x,z,t)}$ com o plano zt em $\mathbb{R}^3_{(x,z,t)}$, e,

para $r = 1$, $K_r = \{(\pm 1, 0, 0)\} \in \mathbb{R}^3_{(x,z,t)}$. Pelas observações acima, sabemos que $g_{(x,z,t)} := g|_{\mathbb{R}^3_{(x,z,t)}}$ é a projeção estereográfica de S^2 no plano xz em $\mathbb{R}^3_{(x,z,t)}$. Pelos Exercícios 1.4.10, sabemos que $g_{(x,z,t)}$ leva os círculos K_r em pares de círculos de Apolônio, que denotaremos por C_r, no plano xz, com focos em $(\pm 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3_{(x,z,t)}$ e simétricos em relação ao eixo z. Juntando tudo e usando a Equação (2.3.13) e que subconjuntos de $\mathbb{R}^3_{(x,z,t)}$ também são subconjuntos de $\mathbb{R}^4$, temos a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} A_\theta(C_r) &= A_\theta \circ g_{(x,z,t)}(K_r) \\ &= A_\theta \circ g\,(K_r) \\ &= g \circ A'_\theta(K_r). \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Fazendo θ variar em $[0, 2\pi]$, poderemos agora concluir de (2.3.16), desde que façamos o exercício abaixo, que as imagens por projeção estereográfica dos toros de Hopf T_r são toros de revolução no eixo z do espaço $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$. Mais precisamente, como A_θ representa uma rotação em $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ ao redor do eixo coordenado z, a união de todos os conjuntos $A_\theta(C_r)$, para $\theta \in [0, 2\pi]$, é um toro de revolução se $0 < r < 1$, ou é apenas o eixo z para $r = 0$, ou é o círculo unitário $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3_{(x,y,z)} : x^2 + y^2 = 1\}$ para $r = 1$.

Exercício 2.3.12. Mostre que

$$T_r = \bigcup_{\theta \in [0,2\pi]} A'_\theta(K_r).$$

Assim, o que acabamos de mostrar é que a decomposição de S^3 por toros de Hopf é levada por projeção estereográfica à decomposição de $\mathbb{R}^3$ obtida por revolução da decomposição de $\mathbb{R}^2$ em círculos de Apolônio. Mais precisamente, rodamos ao redor do eixo z a família de círculos de Apolônio no plano xz com focos em $(\pm 1, 0)$, como os círculos negros na Figura 1.4.2. Os casos extremos dos dois focos e do eixo z são levados, por rotação, ao círculo unitário no plano xy e ao eixo z ele próprio, respectivamente, enquanto cada círculo é levado a um toro de revolução. Na Figura 2.3.2 só vemos toros de revolução folheados por círculos de Hopf: o eixo z não foi incluído e o círculo unitário no plano xy está no interior do toro que vemos (quase) completo.

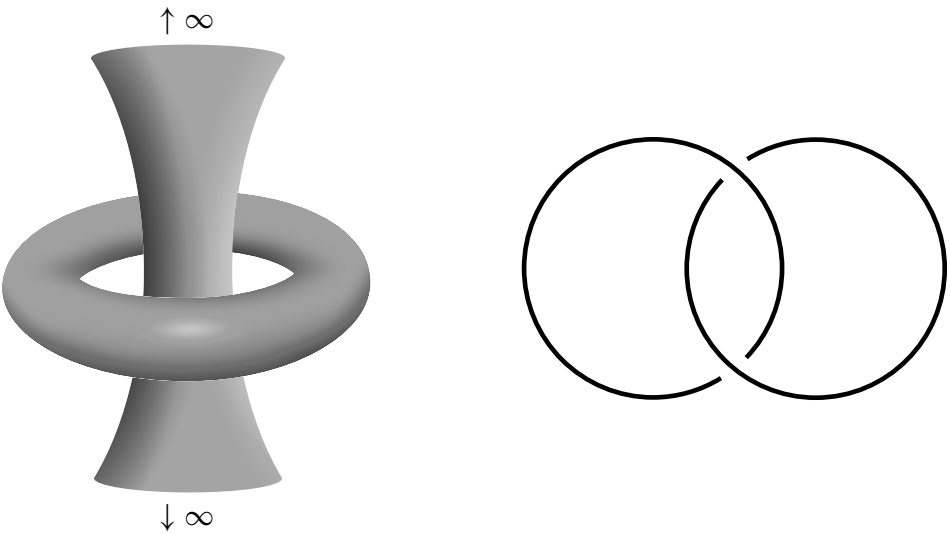


Figura 2.3.4: Esquerda: A projeção estereográfica de dois toros sólidos disjuntos em $S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, um dos quais passa por ∞. Ao engordarmos ambos os toros sólidos até o ponto de eles se tocarem ao longo de seu bordo comum, que é um toro (bidimensional) de Hopf intermediário, todo o volume da 3-esfera será preenchido por sua união. **Direita:** O enlace de Hopf.

2.3.4 A decomposição da 3-esfera em dois toros sólidos

De certo modo, já chegamos a uma das formas mais importantes de entender a 3-esfera: S^3 é a união de dois toros sólidos. Para não deixar o dito pelo não dito, vejamos explicitamente o que estamos afirmando.

Como mencionamos no Capítulo 1, projeção estereográfica realiza a identificação de S^n com a compactificação por um ponto de $\mathbb{R}^n$, de forma que, na Figura 2.3.2, falta o ponto no infinito para termos S^3. Ao adicionarmos ∞, o eixo vertical torna-se também um círculo, que devemos pensar como o círculo "simétrico" ao círculo unitário no plano horizontal. A união desses dois círculos, como o leitor talvez já suspeite, tem um nome: enlace de Gauss. Brincadeira, claro: é o *enlace de Hopf* que é visualizado, de forma simplificada, na parte direita da Figura 2.3.4.

Na imagem esquerda da Figura 2.3.4, vemos dois toros sólidos cujos bordos são toros de Hopf. Na verdade, cada um dos toros sólidos consiste do seu círculo central e de uma união de camadas, cada uma um toro T_r na notação da Equa-

ção (2.3.14). Por exemplo, podemos imaginar que esses dois toros sólidos têm a forma

$$\bigcup_{0\leqslant r\leqslant \varepsilon} T_r \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{1-\varepsilon\leqslant r\leqslant 1} T_r \tag{2.3.17}$$

para certo parâmetro $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. O segundo toro sólido de (2.3.17) "está na cara": ele é o toro sólido horizontal cuja casca bidimensional é a que vemos desenhada na Figura 2.3.4, com tudo o que essa casca "tem dentro". O primeiro toro sólido de (2.3.17) é um pouco menos óbvio: o seu interior (topológico) consiste de tudo o que vemos "dentro" do toro vertical na Figura 2.3.4, embora esse toro não tenha sido desenhado completamente. Caso tentássemos desenhá-lo, poderíamos, a princípio, ficar um pouco confusos sobre o que chamar de "dentro" e de "fora". E, com algum cuidado, é possível perceber que, do ponto de vista do observador da figura, a parte "sólida" do primeiro toro em (2.3.17) é, na verdade, a parte *de fora* da casca vertical parcialmente desenhada na Figura 2.3.4, isto é, a parte que contém o ponto no infinito. Em seu interior (inequívoco, já que topológico) também está o eixo vertical que, junto com o ponto no infinito, forma seu círculo central.

Aumentando o parâmetro ε, tornamos ambos os toros sólidos mais gordos até que, quando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, eles incham ao ponto de se tocarem ao longo de seu bordo comum, o toro de Hopf $T_{1/2}$, exaurindo todo o espaço que os separava quando $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Assim obtemos a decomposição[2] da 3-esfera como união (não disjunta) dos dois conjuntos

$$\bigcup_{0\leqslant r\leqslant \frac{1}{2}} T_r \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant 1} T_r, \tag{2.3.18}$$

ambos homeomorfos ao *toro sólido abstrato* $S^1 \times D^2$, onde S^1 e D^2 são, respectivamente, o círculo e o disco fechado unitários no plano. Em outras palavras, acabamos de descrever a 3-esfera como uma união de dois toros sólidos abstratos colados ao longo de seus bordos (de uma maneira específica). Seria, claro, difícil desenhar os toros sólidos (2.3.18), já que eles preenchem toda a 3-esfera e não sobra nenhum lugar do qual possamos observá-los "de fora". Mesmo assim, a imagem esquerda da Figura 2.3.4 dá-nos toda a informação sobre como colá-los: um deles deve passar pelo "buraco" do outro e vice-versa.

Essa colagem de toros sólidos abstratos é apenas um exemplo de uma construção muito mais geral de 3-variedades, conhecida como *partições de Heegaard*, que voltaremos a ver no Capítulo 3.

[2] Aqui esta palavra está sendo usada informalmente. No Capítulo 3, vamos usá-la com o mesmo sentido técnico de *partição*, isto é, uma coleção de conjuntos disjuntos cuja união é todo o espaço.

2.4 A 3-esfera como um grupo de Lie

O grupo de matrizes SU(2), isomorfo a S^3 graças ao Teorema 2.1.3, constitui um excelente exemplo de um *grupo de Lie*. Esta seção é devotada a uma exploração mais detalhada de algumas das consequências da existência dessa estrutura algébrica na 3-esfera. Quem nunca estudou grupos de Lie em geral, pode tratar o que segue como uma análise de um exemplo concreto de um grupo de Lie não comutativo, exemplo que pode ser considerado, *per se*, como o início de uma agradável introdução à teoria geral de grupos de Lie.

Por definição, um grupo de Lie é uma variedade suave[3] que é também um grupo. Além disso, requer-se que as duas estruturas tenham um bom relacionamento. Variedades são um assunto importante para essas notas e o Capítulo 3 é dedicado a elas. Adiantamos aqui que o que caracteriza variedades suaves é que, nelas, podemos definir funções diferenciáveis e é nesse sentido que as estruturas de grupo e da variedade devem entender-se bem: para que um grupo com uma estrutura de variedade suave seja um grupo de Lie, exigimos que as operações que definem o grupo – seu produto e a operação de tomar inversos – sejam operações diferenciáveis (em cada uma das duas coordenadas no caso do produto). Se a leitora acha essas palavras abstratas em excesso, não se preocupe – muitos dos grupos que já encontramos no Capítulo 1 são de fato grupos de Lie: por exemplo, os grupos de matrizes inversíveis $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, e vários de seus subgrupos. O grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, em particular, é especialmente fácil de entender como uma variedade: cada matriz $n \times n$ em $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ pode ser identificada com um vetor em $\mathbb{R}^{n^2}$, cujas coordenadas são as entradas da matriz, tornando $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ um *subconjunto aberto* de $\mathbb{R}^{n^2}$ (e, consequentemente, uma variedade suave). As operações de multiplicação de matrizes e de tomar inversas são diferenciáveis em $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$: por quê? Nesta seção, vamos pôr a mão na massa dos grupos SU(2) e SO(3), entre outros, e, esperamos, tudo ficará (ainda) mais claro.

Vamos um pouco adiante com a discussão abstrata. Como seria de se esperar, a importância de grupos de Lie vem da interação entre suas duas estruturas, a de grupo e a de variedade diferenciável. Grupos, e grupos de Lie em particular, são objetos muito "homogêneos" no sentido de que qualquer elemento pode ser levado a qualquer outro pelo produto com algum elemento do grupo. Se unirmos a essa observação a hipótese de que o produto no grupo é uma operação suave, concluímos que a homogeneidade em um grupo de Lie é, além de algébrica, suave, isto é,

[3] Isto é, diferenciável ou possivelmente infinitamente diferenciável, mas não nos vamos preocupar com tais filigranas no momento.

dados quaisquer dois elementos de um grupo de Lie, existe um *difeomorfismo* do grupo que leva um ao outro.

Como acontece com funções diferenciáveis, que aprendemos a diferenciar ao mesmo tempo quando aprendemos que seu gráfico tem uma reta tangente, cuja inclinação é dada pela derivada, o mesmo acontece com variedades diferenciáveis: dizemos que nelas podemos definir funções diferenciáveis e, em seguida, queremos definir seu *espaço tangente*. Embora seja possível definir espaços tangentes para variedades abstratas, é mais fácil fazê-lo para aquelas que são subconjuntos de algum $\mathbb{R}^n$. Assim, o espaço tangente a uma variedade diferenciável $M \subset \mathbb{R}^n$ em um ponto $p \in M$, denotado por T_pM, é o que o nome diz: o subespaço linear obtido transladando para a origem o espaço afim (como a reta tangente a um gráfico), composto por todos os vetores de $\mathbb{R}^n$ que são tangentes a M em p. Bem, o leitor talvez possa reclamar de que não é óbvio quais vetores consideramos tangentes a um círculo dentro de $\mathbb{R}^3$. A resposta é que tomamos caminhos diferenciáveis, *contidos em* M e passando pelo ponto p, e tomamos, então, seus vetores velocidade em p. Não é difícil se convencer de que o conjunto de todos esses vetores é, de fato, um espaço afim ou, se consideramos os vetores tendo ponto base na origem, um espaço vetorial – o espaço T_pM.

No caso de um grupo de Lie G, podemos fazer uso da homogeneidade que mencionamos para concluir que qualquer espaço tangente é equivalente a qualquer outro no sentido de que pode ser levado a qualquer outro por um difeomorfismo do grupo. Assim, basta entendermos, digamos, o espaço tangente T_eG a G no elemento neutro $e \in G$. Esse espaço tangente tem grande importância na teoria de grupos de Lie e chama-se a *álgebra de Lie* do grupo. O nome "álgebra" tem motivo, claro. Espaços tangentes de variedades diferenciáveis têm, naturalmente, apenas a estrutura de espaço vetorial. Em grupos de Lie, no entanto, eles adquirem uma estrutura adicional por meio da operação de *colchete de Lie*. Essa operação tem origem, como não poderia deixar de ser, na estrutura que grupos têm a mais que variedades suaves, isto é, em seu produto. Sem nos alongarmos muito em explicações metamatemáticas, embora o produto no grupo não seja traduzível a uma operação no espaço tangente, o *comutador* $ghg^{-1}h^{-1}$ de dois elementos $g, h \in G$ o é: o colchete de Lie em T_eG é a versão infinitesimal do comutador em G. No caso de grupos de Lie matriciais, que são os que nos ocuparão aqui, a álgebra de Lie também será matricial – um espaço vetorial matricial, neste caso – e o colchete de Lie neste espaço vetorial será também, como veremos em exemplos, o comutador de duas matrizes. Encerramos aqui essa discussão geral sobre grupos e álgebras de Lie e voltamos a discutir os casos específicos que nos interessam.

Com o Teorema 2.3.4 em mente, a partir de agora, vamos frequentemente inter-

cambiar os símbolos S^3 e SU(2) embora, mais vezes, vamos usar as coordenadas reais $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ e tratar $S^3 \subset \mathbb{H}$ como a esfera unitária, formada pelos quatérnios $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ de norma 1. O elemento neutro do grupo S^3 é $\mathbf{1} = 1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ e corresponde ao ponto $(1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$. Para entender a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ do grupo SU(2), vamos, então, analisar o espaço tridimensional tangente a S^3 no ponto $\mathbf{1}$. Geometricamente, esse espaço tangente é formado por vetores perpendiculares ao raio saindo da origem e passando por $(1, 0, 0, 0)$. Por isso, este hiperplano tangente é o espaço afim tridimensional

$$\{(1, u, v, w) : u, v, w \in \mathbb{R}\} = (1, 0, 0, 0) + \{(0, u, v, w) : u, v, w \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

e podemos entender $\mathfrak{su}(2)$ como o espaço vetorial associado a esse espaço afim. Para encontrá-lo, basta deslocar o espaço afim subtraindo o vetor $(1, 0, 0, 0)$, o que identifica $\mathfrak{su}(2)$ com o espaço de quatérnios puros,

$$\mathfrak{su}(2) = \{u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} : u, v, w \in \mathbb{R}\}. \tag{2.4.1}$$

Exercício 2.4.1. Conforme a definição geral de uma álgebra de Lie matricial, o *colchete de Lie* é dado pelo comutador de matrizes $[X, Y] = XY - YX$. Verifique diretamente que, para quaisquer quatérnios puros $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$, o quatérnio $\mathbf{pp}' - \mathbf{p}'\mathbf{p}$ é também puro.

Vejamos agora mais uma característica algébrica do grupo SU(2) em nosso caminho para entender a 3-esfera. Usando a identificação (2.4.1), introduzimos a *representação adjunta* do grupo de Lie SU(2) em termos de quatérnios:

$$\mathrm{Ad} : S^3 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2)), \quad \mathrm{Ad}(\mathbf{q})(\mathbf{p}) = \mathbf{qpq}^{-1} \qquad (\mathbf{q} \in S^3,\ \mathbf{p} \in \mathfrak{su}(2)).$$

Exercício 2.4.2. Verifique diretamente que, para qualquer $\mathbf{q} \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, se $\mathbf{p}$ é um quatérnio puro, então $\mathbf{qpq}^{-1}$ também o é. *Sugestão:* Você não precisa calcular todo o produto: basta calcular a parte real.

As coordenadas (u, v, w) da Equação (2.4.1) permitem que tratemos $\mathfrak{su}(2)$ como $\mathbb{R}^3$, o espaço mais familiar a todos nós, seres tridimensionais. Se $\mathbf{q} \in S^3$ é um quatérnio unitário, então $\mathrm{Ad}(\mathbf{q})$ é uma transformação linear inversível de $\mathbb{R}^3$, já que, se $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, podemos considerar λ, λ' como quatérnios reais e, como os quatérnios reais comutam com todos os quatérnios, segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(\mathbf{q})(\lambda\mathbf{p} + \lambda'\mathbf{p}') &= \mathbf{q}\left(\lambda\mathbf{p} + \lambda'\mathbf{p}'\right)\mathbf{q}^{-1} \\
&= \lambda\mathbf{qpq}^{-1} + \lambda'\mathbf{qp}'\mathbf{q}^{-1} \\
&= \lambda\,\mathrm{Ad}(\mathbf{q})(\mathbf{p}) + \lambda'\,\mathrm{Ad}(\mathbf{q})\left(\mathbf{p}'\right).
\end{aligned}$$

Exercícios 2.4.3. a) Respire fundo e verifique que, se $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ é um quatérnio unitário, então a representação matricial de $\mathrm{Ad}(\mathbf{q})$, usando a identificação (2.4.1), é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(ac+bd) \\ 2(ad+bc) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(ab+cd) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{bmatrix}. \quad (2.4.2)$$

b) Use a fórmula anterior para calcular o grupo de matrizes associado ao subgrupo de oito elementos $\{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$. Dê outros exemplos de subgrupos finitos de S^3 e calcule os subgrupos de matrizes associados.

Vejamos agora, de forma conceitual, quais transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ as matrizes acima representam.

Teorema 2.4.4. *(i) Sob a identificação* $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ *dada pelas coordenadas* (u, v, w) *de* (2.4.1)*, a imagem da representação adjunta de* SU(2) *é o grupo* SO(3) *de transformações ortogonais de* $\mathbb{R}^3$ *com determinante igual a* 1.

(ii) O núcleo da representação adjunta de SU(2) *é o grupo de dois elementos* $\{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\} \subset S^3 \cong \mathrm{SU}(2)$.

Demonstração. Para estabelecer a parte (i), notemos primeiro que a norma do quatérnio puro $u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ é a mesma que a norma do vetor $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Para qualquer $\mathbf{q} \in S^3$ e qualquer $\mathbf{p} \in \mathfrak{su}(2)$,

$$\|\mathrm{Ad}(\mathbf{q})(\mathbf{p})\| = \|\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}\| = \|\mathbf{q}\| \cdot \|\mathbf{p}\| \cdot \|\mathbf{q}\|^{-1} = \|\mathbf{p}\|.$$

Isso quer dizer, de acordo com a definição em (1.4.10), que a transformação linear $\mathrm{Ad}(\mathbf{q})$ é ortogonal. Consequentemente, o determinante $\det\big(\mathrm{Ad}(\mathbf{q})\big)$ pode tomar somente os valores $\{-1, +1\}$. Mas como $\det\big(\mathrm{Ad}(\mathbf{q})\big)$ é uma função contínua do quatérnio $\mathbf{q}$ definida no espaço conexo S^3, então $\det\big(\mathrm{Ad}(\mathbf{q})\big)$ é de fato constante. Como a transformação $\mathrm{Ad}(\mathbf{1})$ é a identidade, esse valor constante tem de ser 1, o que implica que $\mathrm{Ad}(\mathbf{q}) \in \mathrm{SO}(3)$ para todo $\mathbf{q} \in S^3$.

Para mostrar que a imagem de Ad é todo o grupo SO(3), devemos considerar uma matriz $A \in \mathrm{SO}(3)$ e construir, a partir dela, um quatérnio $\mathbf{q}$ tal que a transformação linear $\mathrm{Ad}(\mathbf{q})$ de $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ é a mesma que a transformação induzida por A. Este passo da prova será completado nos Exercícios 2.4.7.

Vamos agora demonstrar a parte (ii). A inclusão $\{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\} \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}$ é óbvia, então vamos centrar a nossa atenção na inclusão oposta. Notemos que cada quatérnio pode ser decomposto como $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \mathbf{p}$, onde $\mathbf{r}$ é um quatérnio real e $\mathbf{p}$ é

um quatérnio puro. Então suponhamos que $\mathbf{n} \in \operatorname{Ker} \mathrm{Ad} \subset S^3$, isto é, $\mathbf{npn}^{-1} = \mathbf{p}$ para todo quatérnio puro $\mathbf{p}$. Para um quatérnio qualquer $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \mathbf{p}$ temos então

$$\mathbf{nqn}^{-1} = \mathbf{n}(\mathbf{r} + \mathbf{p})\mathbf{n}^{-1} = \mathbf{nrn}^{-1} + \mathbf{npn}^{-1} = \mathbf{r} + \mathbf{p} = \mathbf{q} \tag{2.4.3}$$

onde usamos a propriedade $\mathbf{nr} = \mathbf{rn}$ estabelecida no Item e dos Exercícios 2.2.5. Como o quatérnio $\mathbf{q}$ em (2.4.3) foi arbitrário, $\mathbf{n}$ satisfaz $\mathbf{nq} = \mathbf{qn}$ para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$. Aplicando o mesmo exercício mais uma vez, concluímos que $\mathbf{n}$ tem de ser um quatérnio real. Porém, $\mathbf{n} \in S^3$, então as únicas possibilidades são $\mathbf{n} = \pm\mathbf{1}$. □

Vamos agora discutir brevemente uma formulação mais abstrata do Teorema 2.4.4. Os dois grupos SU(2) e SO(3) aparecem na seguinte sequência de homomorfismos:

$$0 \to \{\pm\mathbf{1}\} \xrightarrow{\subset} \mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(3) \to 0, \tag{2.4.4}$$

onde "0" denota o grupo trivial. O teorema afirma, essencialmente, que a sequência (2.4.4) é *exata*, o que inclui na verdade as três afirmações:

(i) A inclusão $\{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\} \to \mathrm{SU}(2)$ é injetiva.

(ii) $\operatorname{Ker} \mathrm{Ad} = \{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\}$.

(iii) A representação adjunta $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ é sobrejetiva.

A segunda e a terceira afirmações correspondem às duas partes da nossa formulação original do Teorema 2.4.4, enquanto a primeira afirmação é trivial, porque cada inclusão é injetiva.

Corolário 2.4.5. O grupo SO(3) é isomorfo ao quociente de SU(2) pelo subgrupo de dois elementos $\{\pm\mathbf{1}\}$:

$$\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm\mathbf{1}\}. \tag{2.4.5}$$

Esquecendo-nos da álgebra, podemos enunciar essa última equivalência como um homeomorfismo de espaços topológicos $\mathrm{SO}(3) \cong S^3/\{\mathbf{q} \sim -\mathbf{q}\} =: \mathbb{R}\mathrm{P}^3$, isto é, acabamos de verificar que, como 3-variedade, o grupo SO(3) é o quociente da 3-esfera pela relação de equivalência que identifica pontos antipodais.

O espaço quociente $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$, conhecido como o *espaço projetivo real de dimensão 3*, vai reaparecer na Seção 3.1.3.

Lema 2.4.6. *Para cada matriz $A \in \mathrm{SO}(3)$ existe um vetor não nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathrm{SO}(3)$ uma matriz qualquer, sobre a qual só sabemos que $\det(A) = 1$ e que $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A = I$, onde I é a matriz de identidade 3×3. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\det(A - I) &= \overbrace{\det(A^{\mathrm{T}})}^{=1} \det(A - I) \\ &= \det(A^{\mathrm{T}}A - A^{\mathrm{T}}) \\ &= \det\big(-(A^{\mathrm{T}} - I)\big) \\ &= -\det(A - I).\end{aligned}$$

Portanto, $\det(A - I) = 0$, o que implica a existência de um vetor não nulo $\mathbf{x}$ tal que $(A - I)\mathbf{x} = 0$, ou seja, $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. □

Exercícios 2.4.7. a) Aplicando o Lema 2.4.6, mostre que cada matriz $A \in \mathrm{SO}(3)$ induz uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ que fixa ponto a ponto uma reta ℓ passando pela origem. Com ajuda de (1.4.9), explique por que A age como uma isometria da geometria euclidiana de $\mathbb{R}^3$ preservando a orientação. Conclua que A é uma rotação ao redor de ℓ.

b) Seja $\ell \subset \mathfrak{su}(2)$ a reta passando pela origem na direção do vetor-base $\mathbf{i}$, ou seja, o eixo da coordenada u na notação de (2.4.1). Mostre, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, que a transformação $\mathrm{Ad}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\mathbf{i}\right)$ age em $\mathfrak{su}(2)$ como a rotação ao redor de ℓ pelo ângulo θ.

c) Seja $\mathbf{p} \neq -\mathbf{i}$ um quatérnio puro de norma 1, isto é, $\mathbf{p} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ para números reais u, v, w tais que $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ e $(u, v, w) \neq (-1, 0, 0)$. Mostre que o quatérnio $\mathbf{q} = 1 + u - w\mathbf{j} + v\mathbf{k}$ satisfaz $\mathbf{qiq}^{-1} = \mathbf{p}$. *Sugestão:* Se você quiser usar a matriz (2.4.2), note que $\mathbf{q} \notin S^3$.

d) Dados um quatérnio unitário puro $\mathbf{p}$ e um ângulo θ, mostre que a transformação $\mathrm{Ad}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,\mathbf{p}\right)$ é a rotação de $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ pelo ângulo θ ao redor da reta na direção do vetor $\mathbf{p}$ que passa pela origem. Compare com o Item d dos Exercícios 2.2.5. *Sugestão:* Use os Itens b e c e lembre-se de que Ad é um homomorfismo de SU(2) em SO(3).

e) Explique como a combinação dos resultados acima implica que a imagem do homomorfismo Ad é todo o grupo SO(3).

Para não atrapalhar o fluxo de ideias, usamos um argumento geométrico para identificar $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$: a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ é, por definição, o espaço tangente a SU(2) na identidade. Como identificamos SU(2) com os quatérnios unitários e esses, por sua vez, com S^3, segue que $\mathfrak{su}(2)$ fica assim identificada com o espaço tangente a S^3 no ponto $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0)$ que é, claramente, o subespaço de quatérnios puros $\{u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} = (0, u, v, w) \in \mathbb{R}^4\}$. Vejamos agora $\mathfrak{su}(2)$ do lado mais algébrico. Para determinar o espaço tangente a SU(2) na identidade, precisamos encontrar três vetores linearmente independentes tangentes a SU(2) em $\mathbf{1}$. Três porque sabemos, contando parâmetros reais, que SU(2) é uma 3-variedade real. Considere, então, os caminhos abaixo e faça os exercícios a seguir:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathbf{i}}(t) &= \begin{bmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t & 0 \\ 0 & \cos t - i \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \\
\gamma_{\mathbf{j}}(t) &= \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \\
\gamma_{\mathbf{k}}(t) &= \begin{bmatrix} \cos t & -i \operatorname{sen} t \\ -i \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Exercícios 2.4.8. a) Conte o número de parâmetros reais em SU(2) e convença-se de que não mentimos.

b) Verifique que $\gamma_{\mathbf{i}}, \gamma_{\mathbf{j}}, \gamma_{\mathbf{k}}$ são caminhos em SU(2) e que passam por $\mathbf{1}$ em $t = 0$. Calcule suas derivadas em $t = 0$ e verifique que elas são vetores linearmente independentes em $\mathfrak{su}(2)$.

c) Conclua que $\mathfrak{su}(2)$ é o conjunto de matrizes complexas *anti-hermitianas* com traço 0, isto é,

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \text{ matriz complexa } 2 \times 2 : A^* = -A \text{ e } \operatorname{tr} A = 0\}.$$

d) Use o item anterior para verificar que $\mathfrak{su}(2)$ é de fato fechada sob o colchete de Lie $[A, B] = AB - BA$.

2.4.1 A aplicação exponencial

Cada grupo de Lie G é relacionado à sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ por meio da *aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Informalmente, a aplicação exponencial realiza a aproximação de uma vizinhança do elemento neutro $1 \in G$ pela álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Para cada vetor tangente $v \in \mathfrak{g} = T_1 G$, a aplicação exponencial leva os seus

múltiplos reais tv, $t \in \mathbb{R}$ a uma curva em G, que passa por 1 e cujo vetor tangente em 1 é v. (No caso de grupos de Lie complexos, o mesmo é verdade para $t \in \mathbb{C}$, as imagens de tv sendo pontos de uma *curva holomorfa*.) Em particular, a aplicação exponencial sempre satisfaz $\exp(0) = 1 \in G$.

Para definir a aplicação exponencial em plena generalidade, seria necessário utilizarmos técnicas de geometria diferencial, o que nos afastaria desnecessariamente do tema algébrico deste capítulo. Felizmente, no caso de grupos de Lie *matriciais*, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é sempre um espaço vetorial de matrizes, o que nos permite definir a aplicação exponencial algebricamente, por meio da fórmula:

$$\exp\colon \mathfrak{g} \to G, \qquad \exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}, \tag{2.4.7}$$

onde X^n denota a n-ésima potência da matriz X, isto é,

$$X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \cdots \cdot X}_{n \text{ vezes}}.$$

O exemplo mais simples da aplicação exponencial, do qual se origina o nome "exponencial", é o do grupo de Lie S^1. Vamos agora estudar esse exemplo um pouco, com o objetivo de desenvolver certas intuições geométricas. Embora muito simples e elementar, essa intuição vai nos ajudar na análise do caso mais complicado do grupo de Lie S^3.

Tratando $G = S^1$ como o círculo unitário dentro de $\mathbb{C}$, podemos construir a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_1 S^1$ a partir do espaço afim tangente ao círculo no ponto 1. Assim descobrimos que a álgebra de Lie de S^1 é formada pelos números complexos da forma it para $t \in \mathbb{R}$, quer dizer, números *imaginários puros*, como ilustrado na Figura 2.4.1. Em termos de matrizes, podemos também escrever

$$T_1 S^1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Conforme a fórmula geral (2.4.7), temos

$$\exp(it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = e^{it},$$

o que explica a origem da notação "exp".

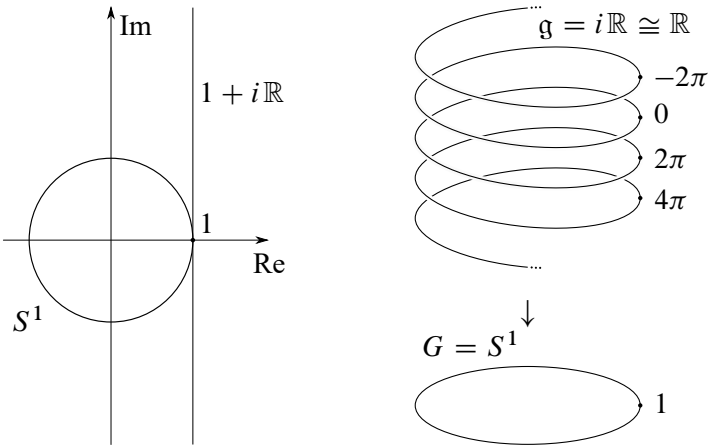


Figura 2.4.1: Esquerda: A reta tangente a $S^1 \subset \mathbb{C}$ no ponto $1 \in S^1$ é $\{1 + it : t \in \mathbb{R}\}$. Por isso, a álgebra de Lie de S^1 é a linha formada pelos números complexos puramente imaginários, ou seja, da forma it para $t \in \mathbb{R}$. **Direita:** A aplicação exponencial de S^1 leva um número complexo da forma it ao elemento $\exp(it) \in S^1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Enrolando a linha $\mathbb{R}$ numa hélice como na figura, a aplicação exp pode ser visualizada como a projeção vertical da hélice sobre sua "sombra" S^1.

Observação 2.4.9. O Teorema 2.1.3 mostra que $S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$ e poderíamos usar o símbolo "$\mathfrak{so}(2)$" para nos referir à álgebra de Lie de S^1. Alternativamente, poderíamos interpretar os números complexos de módulo 1 como matrizes unitárias 1×1, de modo que $S^1 \cong \mathrm{U}(1)$, e introduzir a notação "$\mathfrak{u}(1)$". Porém, essas notações parecem-nos um pouco altaneiras dados os nossos objetivos modestos.

Estamos prontos para analisar o exemplo mais diretamente relacionado com o que estamos estudando: $\exp\colon \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{SU}(2)$. Ao quatérnio puro $\mathbf{p} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ corresponde a matriz

$$M_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} iu & -v - iw \\ v - iw & -iu \end{bmatrix}, \tag{2.4.8}$$

que é a forma geral de uma matriz em $\mathfrak{su}(2)$, segundo o Item c dos Exercícios 2.4.8. De acordo com (2.4.7), deveria valer $\exp(M_{\mathbf{p}}) \in \mathrm{SU}(2)$, o que será verificado nos exercícios a seguir.

Exercícios 2.4.10. a) Mostre que se A é uma matriz anti-hermitiana, isto é, se $A^* = -A$, então os autovalores de A são imaginários puros e os autoveto-

res associados a autovalores distintos são ortogonais segundo o produto escalar (2.3.2). *Sugestão:* Considere a expressão $\mathbf{v}^* A^* \mathbf{v}$ quando $\mathbf{v}$ é um autovetor de A e lembre-se de que $\mathbf{v}^*\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$. Em seguida, considere $\mathbf{v}^* A^* \mathbf{w}$, para $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ autovetores associados a autovalores distintos.

b) Qualquer quatérnio puro pode ser obtido como o produto $t\mathbf{p}$, onde $\mathbf{p}$ é um quatérnio unitário puro e $t \in \mathbb{R}$. Diagonalize a matriz $M_{t\mathbf{p}}$. Pelo item anterior, você deve encontrar autovalores imaginários puros e autovetores ortogonais. Encontre $S, T \in \mathrm{SU}(2)$ tais que

$$\begin{aligned} M_{t\mathbf{p}} &= S \cdot \begin{bmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{bmatrix} \cdot S^{-1} \\ &= T \cdot \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} \cdot T^{-1}. \end{aligned}$$

c) Seja G um grupo de Lie matricial e seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Usando Equação (2.4.7), mostre que $\exp(gvg^{-1}) = g\exp(v)g^{-1}$ para todo $g \in G$ e todo $v \in \mathfrak{g}$.

d) Calcule a exponencial $\exp M_{t\mathbf{p}}$, verifique que $\exp M_{t\mathbf{p}} \in \mathrm{SU}(2)$ e que $\exp M_{t\mathbf{p}}$ corresponde ao quatérnio unitário $\cos t + \operatorname{sen} t\, \mathbf{p}$. *Sugestão:* A propriedade estabelecida no Item c ajuda neste cálculo.

e) Conclua que, quando t varia em $\mathbb{R}$, $\exp M_{t\mathbf{p}}$ percorre um círculo máximo em S^3, isto é, um círculo de raio 1 em S^3. Compare com o que vimos acima sobre o círculo e sua álgebra de Lie.

É interessante analisarmos agora a interação entre a representação adjunta

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2)) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3)$$

e a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{SU}(2)$. Os Exercícios 2.4.10 mostram que as exponenciais $\exp(t\mathbf{p}) = \cos t + \mathbf{p}\operatorname{sen} t$ percorrem, para t variando em $\mathbb{R}$, o círculo máximo de $S^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ obtido por interseção com o 2-plano gerado pelos vetores $\mathbf{1}, \mathbf{p} \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Para descrever a ação adjunta dos quatérnios da forma $\cos t + \mathbf{p}\operatorname{sen} t$, voltemos ao Item d dos Exercícios 2.4.7, onde descobrimos que as transformações da forma $\mathrm{Ad}\left(\cos\frac{t}{2} + \mathbf{p}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)$ são as rotações por ângulo $t \in \mathbb{R}$ ao redor da direção de $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Como todo quatérnio puro $\mathbf{q}$ pode ser escrito como $\mathbf{q} = t\mathbf{p}$, onde $\|\mathbf{p}\| = 1$ e $t \geqslant 0$, a composição

$\mathrm{Ad} \circ \exp\colon \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3)$ leva o vetor $\mathbf{q} = t\mathbf{p} \in \mathfrak{su}(2)$ à rotação pelo ângulo $2t \in \mathbb{R}$ ao redor da direção de $\mathbf{q}$ (ou $\mathbf{p}$, já que são a mesma). (O que acontece quando $\mathbf{q} = 0$?) Além disso, quando t, variando em $\mathbb{R}$, percorre um intervalo de comprimento 2π, a exponencial $\exp(t\mathbf{p})$ percorre um círculo máximo ao redor de $\mathrm{SU}(2)$ e as adjuntas $A_{\mathbf{p}}(2t) := \mathrm{Ad}\,(\exp\,(t\mathbf{p}))$ "dão duas voltas" ao redor da direção de $\mathbf{p}$, isto é, as matrizes $A_{\mathbf{p}}(2t) \in \mathrm{SO}(3)$ percorrem duas vezes o caminho fechado $A_{\mathbf{p}}\colon [0, 2\pi] \to \mathrm{SO}(3)$, correspondente às rotações ao redor da direção de $\mathbf{p}$ por ângulos t crescendo de 0 a 2π. Observe que isso é compatível com o fato de que $\mathrm{SU}(2)$ é um *recobrimento duplo* de $\mathrm{SO}(3)$, como enunciado no Corolário 2.4.5.

Assim, o espaço tridimensional $\mathfrak{su}(2)$ é responsável pelas "três dimensões" de rotações de $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, os quatérnios puros $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formam uma base ortonormal de $\mathfrak{su}(2)$ e correspondem a rotações de $\mathbb{R}^3$ ao redor de três eixos perpendiculares. Os físicos referem-se a essas dimensões como os *graus de liberdade* de rotações. Analogamente, pilotos falam sobre os três modos de rotação de um avião ao redor dos três eixos principais, tipicamente usando os termos em inglês: *roll, pitch* e *yaw*.

Essa descrição quaterniônica de rotações de $\mathbb{R}^3$ tem muita utilidade nas aplicações de geometria. Dado um eixo $\ell \subset \mathbb{R}^3$ passando pela origem e um ângulo de rotação θ, é, em geral, bastante difícil encontrar a matriz $A \in \mathrm{SO}(3)$ que representa a rotação ao redor de ℓ pelo ângulo θ. Mas essa tarefa torna-se bem mais fácil com os quatérnios: se $\mathbf{p}$ é o vetor de norma 1 na direção de ℓ, então a transformação procurada é simplesmente

$$\mathrm{Ad}\left(\exp(\tfrac{\theta}{2}\mathbf{p})\right) = \mathrm{Ad}\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + \mathbf{p}\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta}{2}\right).$$

Para compor duas ou mais rotações, não é preciso multiplicar as matrizes: como Ad é um homomorfismo, basta, ao invés disso, multiplicar os quatérnios correspondentes. Uma das vantagens dessa abordagem em computação gráfica 3D é que um computador pode representar um quatérnio $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ pelos quatro números reais (a, b, c, d), ao invés dos $3\times3 = 9$ termos da matriz $\mathrm{Ad}(\mathbf{q}) \in \mathrm{SO}(3)$. Além disso, para ajustar o ângulo de rotação, basta multiplicar o quatérnio $\mathbf{q}$ por um número real. Por essas razões, quatérnios oferecem uma maneira eficaz e agradável de encontrar, manipular e compor rotações de $\mathbb{R}^3$, apesar da inconveniência minúscula de cada rotação ser representada por dois quatérnios unitários: $\mathbf{q}$ e $-\mathbf{q}$.

2.4.2 A simetria da 3-esfera

Como todos sabemos, as esferas em geral têm uma forma geométrica extremamente simétrica. Por exemplo, a 2-esfera S^2 – a superfície de uma bola perfeitamente redonda – pode ser rodada em um número infinito de maneiras, todas a levando de volta sobre si própria. Essas rotações são elementos do grupo SO(3) – isometrias do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ que fixam a origem e preservam a orientação. Porém, o grupo SO(3) é um objeto "externo" à 2-esfera, por assim dizer, no sentido de que a 2-esfera pertence decididamente ao mundo de geometria, enquanto SO(3) é um objeto principalmente algébrico.

Analogamente, a 3-esfera tem uma enorme quantidade de simetrias, sendo preservada por todas as transformações em SO(4), isto é, as isometrias do $\mathbb{R}^4$ que fixam a origem. Mas, contrariamente à 2-esfera, a 3-esfera é também um objeto algébrico *per se* – o grupo de quatérnios unitários, isomorfo a SU(2). Dado que cada grupo age em si mesmo por multiplicação, talvez seja razoável esperar que, como grupo, SU(2) tenha também *alguma* simetria. Mas qual? Além disso, faz sentido perguntar se a estrutura algébrica de SU(2) é responsável por *toda* a simetria de S^3, apesar de SU(2) *não ser* isomorfo a SO(4). Para responder a essas perguntas, temos de entender a relação entre os dois grupos SU(2) e SO(4) e como eles agem na 3-esfera.

Vamos agora analisar essa situação curiosa com mais cuidado, mas, antes de fazê-lo, é instrutivo ter claro o conceito de *ação* de um grupo G em um espaço X. Uma forma simples de definir uma *ação* de G em X é como um homomorfismo $G \to \mathrm{Aut}(X)$, onde $\mathrm{Aut}(X)$ é o grupo de *automorfismos* de X, isto é, o grupo de transformações bijetivas de X nele mesmo que preservam a(s) estrutura(s) que consideramos importante(s) em X (por exemplo, podemos considerar X apenas como conjunto; ou, se X é um espaço topológico, seus automorfismos são os homeomorfismos de X nele mesmo; ou, se X é um espaço métrico, seus automorfismos podem ser seus homeomorfismos ou suas isometrias, isto é, os homeomorfismos que preservam distâncias). Em geral, definimos uma *ação à esquerda* de G em um conjunto X como uma transformação

$$\cdot : G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

com as duas propriedades a seguir, onde $e \in G$ é a identidade em G e $g, h \in G$ são quaisquer dois elementos:

(i) $e \cdot x = x$,

(ii) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Um exemplo típico é o do grupo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ de matrizes $n \times n$ reais e inversíveis, agindo em $\mathbb{R}^n$ por multiplicação (de vetores coluna!) à esquerda. Nesse caso, podemos considerar importante a estrutura linear em $\mathbb{R}^n$, isto é, tomar $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Alternativamente, se consideramos a mesma ação, mas restrita ao subgrupo $\mathrm{SO}(n) < \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, poderíamos tomar $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ como antes ou como o grupo de isometrias da métrica euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Exercícios 2.4.11. a) Já vimos a definição e um exemplo de ação de um grupo anteriormente neste capítulo. Qual? *Sugestão:* Veja a página 55.

b) Defina uma *ação à direita* de G em X. Depois verifique, em um livro ou na Wikipédia, que você não trocou as bolas (ou, mais precisamente, que não fez escolhas que não são as usuais). Dê exemplos.

Com as definições de ações acima em mente, definimos agora ações muito específicas: aquelas de um grupo sobre si próprio.

Definição 2.4.12. Seja g um elemento de um grupo de Lie G. A *multiplicação por g à esquerda* é definida por:

$$ {}_gm : G \to G, \qquad {}_gm(x) = gx. \tag{2.4.9}$$

De maneira análoga, a *multiplicação por g à direita* é definida como

$$ m_g : G \to G, \qquad m_g(x) = xg.$$

Por exemplo, se $G = S^1$ e $g = e^{it}$, a aplicação ${}_gm$ age como a rotação do círculo pelo ângulo t no sentido anti-horário (e a multiplicação à direita m_g faz o mesmo, já que S^1 é comutativo). Quando o valor de $t \in \mathbb{R}$ aumenta a partir de zero e quando $g = g_t = e^{it}$, a transformação ${}_gm$ roda o círculo por um ângulo cada vez maior. Como ilustrado na Figura 2.4.2, a derivada de ${}_gm$ é um campo vetorial no círculo S^1 que representa as "velocidades instantâneas" dos pontos do círculo durante uma rotação contínua.

Exercício 2.4.13. Calcule a derivada $\frac{d}{dt}\left({}_{g_t}m\right)$, formalize o que foi dito acima e compare com a Figura 2.4.1.

O campo de vetores tangentes mostrado na Figura 2.4.2 tem a propriedade de *invariância à esquerda*. Em geral, um campo invariante à esquerda é um campo vetorial que é levado a si próprio pela derivada $D({}_gm)$ para todo $g \in G$. Consequentemente, um campo vetorial invariante é completamente determinado pelo seu valor no elemento neutro $1 \in G$, já que cada elemento $g \in G$ pode ser representado como $g = {}_gm(1)$. Assim, o espaço vetorial de campos invariantes à esquerda é isomorfo à álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo G.

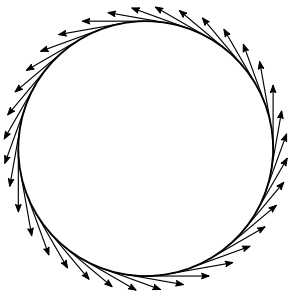


Figura 2.4.2: Um campo vetorial invariante tem a propriedade que a derivada $D({}_g m)$ da multiplicação por g leva o campo a si próprio, para cada elemento g do grupo de Lie. No caso do círculo S^1, isso significa que os campos invariantes têm simetria por rotações.

Exercício 2.4.14. Verifique que o conjunto de campos vetoriais em G invariantes à esquerda é realmente um espaço vetorial.

No caso do círculo, o significado visual da invariância é que o campo tem simetria por rotações do círculo. Obviamente, a noção de campos vetoriais invariantes à esquerda (ou à direita[4]) faz sentido para todos os grupos de Lie, embora visualizar esses campos possa ser bem mais difícil em dimensões superiores. Nos exercícios que seguem, vamos elaborar certas propriedades análogas no caso do grupo S^3 de quatérnios unitários, cuja álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ já conhecemos bastante bem.

Exercícios 2.4.15. a) Dado um quatérnio puro $\mathbf{p}$ de norma 1, considere o homomorfismo ϕ definido na Equação (2.2.13). É claro que $\|\phi(a+bi)\| = |a+bi|$ para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$. Conclua que ϕ leva o círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$ a um subgrupo de S^3 isomorfo a S^1.

b) Dado um quatérnio unitário $\mathbf{q} \in S^3$, considere a aplicação ${}_{\mathbf{q}}m : S^3 \to S^3$ definida por (2.4.9). Mostre que ${}_{\mathbf{q}}m$ é a restrição de uma transformação linear de $\mathbb{R}^4$ induzida por uma matriz $A \in \mathrm{SO}(4)$. *Spoiler:* Se $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, então

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}. \tag{2.4.10}$$

Observe os quatro blocos 2×2 e compare-os com as representações matriciais dos números complexos $a + ib$ e $c + id$. Surpreso?

c) Considere agora a multiplicação à direita $m_{\mathbf{q}}$ por um quatérnio unitário $\mathbf{q}$ e construa uma matriz $B \in \mathrm{SO}(4)$ descrevendo essa simetria de S^3. Compare com a matriz de (2.4.10).

[4]No caso do círculo, não é preciso fazer esta distinção porque S^1 é um grupo comutativo.

d) Tente imaginar os campos vetoriais invariantes à esquerda definidos na 3-esfera S^3 pelos elementos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathfrak{su}(2)$. Qual o significado geométrico das imagens desses campos sob a derivada do homomorfismo adjunto Ad?

e) Prove a fórmula $\big(m_g(x)\big)^{-1} = {}_{(g^{-1})}m\big(x^{-1}\big)$.

f) Encontre um exemplo demonstrando que $\exp(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \neq \exp(\mathbf{p})\exp(\mathbf{p}')$ em geral.

Voltando ao nosso problema principal – o estudo da relação entre as ações dos dois grupos, SU(2) e SO(4), em S^3 – observemos primeiro que os Itens b e c acima mostram que a multiplicação por quatérnios unitários, tanto à direita quanto à esquerda, age em $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ por transformações ortogonais de determinante igual a 1, ou seja, por elementos de SO(4). Logo veremos que *todas* as transformações em SO(4) podem ser obtidas por meio de multiplicação simultânea por quatérnios unitários à direita e à esquerda. Para exprimir essas propriedades de multiplicação na linguagem de álgebra, revisitemos a função que leva um quatérnio unitário $\mathbf{q}$ à transformação ${}_{\mathbf{q}}m$ de $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$. Essa função é na verdade um homomorfismo de grupos, que pode ser definido formalmente assim:

$$ {}_{(\,\cdot\,)}m : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4), \qquad {}_{(\,\cdot\,)}m : \mathbf{q} \mapsto {}_{\mathbf{q}}m, \tag{2.4.11} $$

ou seja, a imagem sob ${}_{(\,\cdot\,)}m$ do quatérnio $\mathbf{q}$ é a transformação $\mathbb{R}$-linear de $\mathbb{H}$ definida por ${}_{\mathbf{q}}m(\mathbf{x}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}$ para todos os vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$. A verificação que a fórmula (2.4.11) define um homomorfismo é fácil: dados dois quatérnios unitários $\mathbf{q}$ e $\mathbf{s}$, temos

$$ {}_{(\mathbf{qs})}m(\mathbf{x}) = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{s})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{q}\cdot(\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}) = {}_{\mathbf{q}}m\big({}_{\mathbf{s}}m(\mathbf{x})\big) = \big({}_{\mathbf{q}}m \circ {}_{\mathbf{s}}m\big)(\mathbf{x}), $$

ou seja, ${}_{(\mathbf{qs})}m = {}_{\mathbf{q}}m \circ {}_{\mathbf{s}}m$, mostrando que (2.4.11) é um homomorfismo que relaciona a multiplicação quaterniônica em SU(2) à composição de transformações lineares em SO(4) ou, equivalentemente, à multiplicação de matrizes 4×4.

Infelizmente, a multiplicação à direita não tem essa agradável propriedade, porque a ordem das multiplicações acaba sendo "errada":

$$ m_{(\mathbf{qs})}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot(\mathbf{q}\cdot\mathbf{s}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{q})\cdot\mathbf{s} = m_{\mathbf{s}}\big(m_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})\big) = \big({}_{\mathbf{s}}m \circ {}_{\mathbf{q}}m\big)(\mathbf{x}). $$

A ordem dos fatores na igualdade $m_{(\mathbf{qs})} = {}_{\mathbf{s}}m \circ {}_{\mathbf{q}}m$ é oposta em relação ao que precisaríamos para se satisfazer a definição de um homomorfismo de grupos. Para eliminar esta dificuldade, vamos aplicar um popular truque algébrico – a *inserção*

de inversos – que faz uso da propriedade $(\mathbf{qs})^{-1} = \mathbf{s}^{-1}\mathbf{q}^{-1}$. Ao inserirmos os inversos, obtemos a seguinte aplicação:

$$m_{(\,\cdot\,)^{-1}} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4), \qquad m_{(\,\cdot\,)^{-1}} : \mathbf{q} \mapsto m_{\mathbf{q}^{-1}}, \tag{2.4.12}$$

que leva um quatérnio $\mathbf{q}$ à transformação de $\mathbb{H}$ definida por $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{q}^{-1}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$.

Exercício 2.4.16. Verifique que a aplicação dada pela Equação (2.4.12) é um homomorfismo de grupos.

O seguinte teorema garante que a combinação de multiplicação pelos quatérnios unitários à direita e à esquerda produz todas as transformações de SO(4), cada uma delas em exatamente duas maneiras diferentes.

Teorema 2.4.17. *Seja μ a aplicação definida por*

$$\mu\colon\ \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4), \qquad \mu(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = {}_{\mathbf{q}_1}m \circ m_{\mathbf{q}_2^{-1}}\,. \tag{2.4.13}$$

ou, equivalentemente, seja μ dada pela fórmula

$$\mu(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{q}_2^{-1} \quad \textit{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4. \tag{2.4.14}$$

Então μ é um epimorfismo de grupos, cujo núcleo é o grupo de dois elementos

$$\operatorname{Ker}\mu = \big\{(\mathbf{1}, \mathbf{1}),\ (-\mathbf{1}, -\mathbf{1})\big\} \subset \big(\mathrm{SU}(2)\big)^2. \tag{2.4.15}$$

A parte mais difícil da prova do teorema é a demonstração da sobrejetividade de μ. Para simplificar este passo da prova, consideremos uma matriz qualquer $X \in \mathrm{SO}(4)$ e denotemos por $\mathbf{v}_1$ o primeiro vetor-coluna de X. Como X é ortogonal, sabemos que $\|\mathbf{v}_1\| = 1$. Explicitamente, podemos escrever $\mathbf{v}_1 = (a, b, c, d)^{\mathrm{T}}$ para certos números reais a, b, c, d que satisfazem $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Esses quatro números reais determinam completamente a matriz $A \in \mathrm{SO}(4)$ dada pela Equação (2.4.10). A relação entre A e X é descrita no seguinte lema.

Lema 2.4.18. *Com a notações acima, a matriz $X \in \mathrm{SO}(4)$ tem a forma*

$$X = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \tag{2.4.16}$$

onde B é uma matriz 3×3 que pertence a $\mathrm{SO}(3)$.

Demonstração do Lema 2.4.18. Suponhamos que a matriz X tem a forma

$$X = \begin{bmatrix} a & \\ b & \\ c & Y \\ d & \end{bmatrix},$$

onde Y é uma matriz 4×3. Seja A a matriz dada na Equação (2.4.10) em termos dos quatro números $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Multiplicando por $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$ à esquerda, obtemos

$$A^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & \\ 0 & A^{-1}Y \\ 0 & \end{bmatrix}.$$

Como A e X são elementos do grupo SO(4), a matriz $A^{-1}X$ também o é, então as colunas da submatriz $A^{-1}Y$ têm de ser vetores ortogonais à primeira coluna $(1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Em outras palavras, a primeira fila de $A^{-1}Y$ consiste de zeros:

$$A^{-1}Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & B & \end{bmatrix},$$

onde B é uma matriz 3×3. Além disso, as colunas de $A^{-1}Y$ têm de ser vetores de norma 1 ortogonais um a outro – mas, como as primeiras coordenadas deles são todas iguais a 0, isso implica que a mesma propriedade vale para a matriz B, ou seja, que B é uma matriz ortogonal. A igualdade $\det B = 1$ segue diretamente da Equação (2.4.16), verificando assim que $B \in \mathrm{SO}(3)$. □

Estamos agora prontos de voltar ao Teorema 2.4.17. Primeiro, vamos verificar que a aplicação μ definida no teorema é de fato um homomorfismo. Para este fim, temos de considerar dois elementos $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ do produto cartesiano $\big(\mathrm{SU}(2)\big)^2 = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ e calcular:

$$\begin{aligned} \mu\big((\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \cdot (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\big)(\mathbf{x}) &= (\ldots) \\ &= \big(\mu(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \circ \mu(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)\big)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Exercício 2.4.19. Complete os passos que faltam no cálculo acima.

Como μ leva o produto no grupo $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ à composição de aplicações lineares em $\mathrm{SO}(4)$, também conhecida como produto matricial, concluímos que μ é um homomorfismo.

Demonstração do Teorema 2.4.17. Para finalizar a prova, devemos mostrar que o homomorfismo μ é sobrejetivo e que seu núcleo é o subgrupo dado em (2.4.15).

O Lema 2.4.18 vai nos ajudar na prova da sobrejetividade. Seja $X \in \mathrm{SO}(4)$ um elemento qualquer e seja $\mathbf{v}_1$ a primeira coluna de X. Explicitamente, ponhamos $\mathbf{v}_1 = (a, b, c, d)^{\mathrm{T}}$ para certos números reais a, b, c, d. Seja A a matriz dada em (2.4.10). Conforme o Lema 2.4.18, existe uma matriz $B \in \mathrm{SO}(3)$ para a qual vale a igualdade

$$X = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}. \tag{2.4.17}$$

O espaço vetorial no qual X age é $\mathbb{R}^4$, mas vamos pensar neste $\mathbb{R}^4$ em termos dos quatérnios. Como sabemos bem, cada quatérnio $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ pode ser decomposto como $\mathbf{x} = \mathbf{r} + \mathbf{p}$, onde $\mathbf{r}$ é um quatérnio real e $\mathbf{p}$ é um quatérnio puro. Em termos de $\mathbb{R}^4$, essa decomposição é simplesmente a separação da primeira coordenada das três coordenadas restantes. Deste ponto de vista, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}$ leva cada quatérnio real a ele mesmo (graças à entrada "1") e leva o quatérnio puro $\mathbf{p} \in \mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ ao quatérnio $B(\mathbf{p})$, onde tratamos a transformação B de $\mathbb{R}^3$ como uma transformação de $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$. De fato, já encontramos esta mesma ação de $\mathrm{SO}(3)$ em $\mathfrak{su}(2)$ no Teorema 2.4.4, onde descobrimos que a representação adjunta de $\mathrm{SU}(2)$ toma todos os valores em $\mathrm{SO}(3)$. Por isso, a matriz $B \in \mathrm{SO}(3)$ descreve uma transformação de $\mathfrak{su}(2)$ da forma $\mathrm{Ad}(\mathbf{s})$ para certo quatérnio unitário $\mathbf{s}$. Consequentemente, tratando $\mathbf{x}$ como um vetor-coluna em $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$, podemos calcular:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} (\mathbf{r} + \mathbf{p}) &= \mathbf{r} + B(\mathbf{p}) = \mathbf{r} + \mathrm{Ad}(\mathbf{s})(\mathbf{p}) \\ &= \mathbf{srs}^{-1} + \mathbf{sps}^{-1} = \mathbf{s}(\mathbf{r} + \mathbf{p})\mathbf{s}^{-1} = \mathbf{sxs}^{-1}, \end{aligned}$$

onde utilizamos, ao passar à segunda linha, a propriedade $\mathbf{srs}^{-1} = \mathbf{r}$ estabelecida no Item e dos Exercícios 2.2.5.

Lembremo-nos de que, conforme o Item b dos Exercícios 2.4.15, a multiplicação à esquerda pelo quatérnio $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ tem a forma matricial dada

pela matriz A. Por isso, a Equação (2.4.17) permite-nos escrever

$$X \cdot \mathbf{x} = \left(A \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \right) \cdot \mathbf{x} = A \cdot (\mathbf{sxs}^{-1}) = \mathbf{qsxs}^{-1} = \mu(\mathbf{qs}, \mathbf{s})(\mathbf{x}),$$

o que implica que $X = \mu(\mathbf{qs}, \mathbf{s})$. Como $X \in \mathrm{SO}(4)$ era um elemento arbitrário, o homomorfismo μ é sobrejetivo.

Para calcular o núcleo de μ, suponhamos que $\mu(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ é o elemento neutro de SO(4), para certo par ordenado $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \big(\mathrm{SU}(2)\big)^2$. Em particular, temos $\mu(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)(\mathbf{1}) = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2^{-1} = \mathbf{1}$, ou seja, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$. Além disso, para qualquer quatérnio puro $\mathbf{p} \in \mathfrak{su}(2)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)(\mathbf{p}) &= \mu(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)(\mathbf{p}) \\ &= \mathbf{q}_1\mathbf{p}\mathbf{q}_1^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}(\mathbf{q}_1)(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{q}_1 \in \operatorname{Ker} \mathrm{Ad} = \{-\mathbf{1}, \mathbf{1}\}$, o que nos deixa em um dos dois casos:

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \quad \text{ou} \quad (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = (-\mathbf{1}, -\mathbf{1}).$$

É fácil de verificar que $\mu(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ é de fato trivial em ambos os casos. □

2.4.3 O que acontece em outras dimensões?

Nas seções antecedentes, discutimos as numerosas analogias entre as esferas S^1 e S^3, mostrando que ambas são grupos de Lie e descrevendo suas álgebras de Lie. Nos dois casos $n \in \{1, 3\}$, as operações binárias em S^n originavam-se de várias noções de multiplicação em $\mathbb{R}^{n+1}$: a multiplicação de números complexos em $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ou de quatérnios em $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$.

Entretanto, nada dissemos sobre a esfera 2-dimensional S^2 ou sobre qualquer conceito de multiplicação de elementos de $\mathbb{R}^3$. O matemático irlandês William R. Hamilton (1805–1865), que descobriu (inventou?) os quatérnios e cujo sobrenome deu origem ao símbolo "$\mathbb{H}$", passou um longo tempo tentando inventar uma "multiplicação" que torne $\mathbb{R}^3$ numa álgebra normada real de dimensão 3. Se uma tal operação binária existisse, a esfera S^2 teria também a estrutura de um grupo de Lie. O que ninguém sabia nos tempos de Hamilton é que isso é impossível: a esfera S^2 não admite nenhuma estrutura de um grupo Lie e, por isso, não se pode equipar $\mathbb{R}^3$ com uma multiplicação consistente. A causa disso é topológica e só

vamos mencioná-la brevemente para quem já entende um pouco mais sobre topologia – outros leitores podem ler o que segue sem se preocupar demais em entender tudo o que é dito ou (menos recomendado) passar diretamente à Seção 2.5.

Como explicaremos em mais detalhe na Seção 3.2.4, se X é uma variedade suave, então o *fibrado tangente* de X é o espaço topológico TX que consiste da totalidade de espaços tangentes em todos os pontos de X. Em particular, se v é um vetor tangente a X num ponto x, vamos escrever $x = \pi(v)$, o que define uma aplicação canônica $\pi : TX \to X$. As pré-imagens $\pi^{-1}(x)$ são exatamente os espaços tangentes T_xX para cada $x \in X$.

Se $X = G$ é um grupo de Lie, o fibrado tangente TG é *trivial*, ou seja, a aplicação π pode ser decomposta de modo seguinte:

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{\quad u \quad} & \mathfrak{g} \times G \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\pi_2} & \\ & G, & \end{array} \tag{2.4.18}$$

onde π_2 é a projeção de um par ordenado $(v, g) \in \mathfrak{g} \times G$ ao seu segundo membro g. Para construir a aplicação u, vamos considerar um vetor v tangente a G num ponto $g \in G$ e postular que a imagem desse vetor sob u seja o elemento $\big(D(_{g^{-1}}m)(v), g\big)$. Na verdade, u é um isomorfismo de fibrados vetoriais sobre G, embora não vamos discutir o que isso significa.

Consequentemente, uma variedade suave X pode ser tornada num grupo de Lie somente se o fibrado tangente TX é trivial. Variedades com essa propriedade são chamadas *variedades paralelizáveis*, e as únicas esferas S^n entre elas são aquelas com $n \in \{0, 1, 3, 7\}$. Por isso, as únicas esferas nas quais podemos *esperar* encontrar estruturas de grupos de Lie são S^0, S^1, S^3 e S^7.

O caso de $n = 0$ é trivial, mas podemos definir $S^0 = \partial D^1 = \{-1, 1\}$, e esse conjunto de dois elementos é um grupo multiplicativo, que consiste, evidentemente, de todos os números reais de valor absoluto igual a 1. Como já vimos na seção anterior, S^1 é o grupo multiplicativo de números *complexos* de módulo 1, enquanto S^3 corresponde aos quatérnios de norma 1. Porém, no caso de S^7, a situação muda – esta esfera, embora paralelizável, não admite nenhuma estrutura de grupo de Lie – sendo, portanto, três a maior dimensão na qual a esfera é um grupo de Lie: é hora de voltarmos a ela.

2.5 O espaço das órbitas do fluxo de Hopf

Voltaremos a seguir ao estudo do fluxo de Hopf, introduzido na Seção 2.3.2. Segundo o Teorema 2.3.9, as órbitas do fluxo de Hopf são círculos máximos dentro da 3-esfera. Em outras palavras, o fluxo de Hopf decompõe a 3-esfera em uma união disjunta de círculos máximos. Essa decomposição, chamada fibração de Hopf, já foi estudada geometricamente em detalhe nas seções anteriores e visualizada nas Figuras 2.3.1 e 2.3.2. Entretanto, os aspectos *operacionais* da fibração de Hopf continuam a surpreender-nos: a ação do fluxo de Hopf é uma rotação simultânea de todos esses círculos, ou seja, eles podem ser rodados em harmonia perfeita, produzindo isometrias de toda a esfera S^3!

Nesta seção vamos estudar algumas das consequências dessas propriedades maravilhosas da fibração de Hopf. Existem duas maneiras equivalentes de pensar sobre o fluxo de Hopf. Conforme a definição na Equação (2.3.9), o fluxo de Hopf é uma ação do grupo aditivo de números reais na 3-esfera, que associa, a cada $t \in \mathbb{R}$ e a cada $\mathbf{q} \in S^3$, o elemento

$$\varphi(t, \mathbf{q}) = e^{it} \cdot \mathbf{q} \in S^3.$$

Na fórmula acima, o quatérnio unitário $\mathbf{q}$ é sempre multiplicado pelo número complexo e^{it} de módulo 1, de modo que podemos, ao invés de tratar o fluxo de Hopf como uma ação de $\mathbb{R}$ em S^3, tratá-lo como uma ação do grupo S^1 em S^3. Para cada $\omega \in S^1$, esta ação $\widetilde{\varphi}$ tem a forma

$$\widetilde{\varphi}(\omega, \mathbf{q}) = \omega \cdot \mathbf{q} \in S^3. \tag{2.5.1}$$

A vantagem dessa abordagem é que a multiplicação de quatérnios por escalares complexos – originalmente introduzida na Equação (2.3.8) – permite-nos realizar o círculo S^1 como um subgrupo de S^3. Explicitamente, esse subgrupo é o conjunto $\{\omega \cdot \mathbf{1} : \omega \in S^1\} \subset S^3$, onde $\mathbf{1} = 1 + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ é a unidade da multiplicação quaterniônica.

Exercício 2.5.1. Verifique que o conjunto mencionado acima é realmente um subgrupo do grupo dos quatérnios unitários. Ele é normal em S^3?

A partir de agora, vamos tratar o círculo S^1 como um subgrupo específico de S^3, isto é, o subgrupo que acabamos de definir. Dessa maneira, a ação do círculo na 3-esfera dada em (2.5.1) é, de fato, uma ação *de um subgrupo sobre todo o grupo*. O nosso objetivo é entender o espaço quociente S^3/S^1 desta ação, quer dizer, vamos tentar entender *o espaço das órbitas do fluxo de Hopf*. O resultado

fundamental é que este espaço tem a topologia da 2-esfera S^2, ou seja, que os círculos de Hopf formando a 3-esfera são "enumerados" ou "parametrizados" pelos pontos da 2-esfera. Em particular, cada órbita do fluxo pode ser realizada como um ponto da 2-esfera de tal maneira que as órbitas "próximas" uma à outra correspondem a pontos na 2-esfera que também são "próximos". Uma expressão rigorosa do que queremos dizer aqui seguirá do Teorema 2.5.2.

No livro de Thurston (1997, p. 103) podemos encontrar a frase: "Informally, the three-sphere is a two-sphere's worth of circles.", que poderíamos traduzir, com alguma licença poética (?), como "Informalmente, a 3-esfera é uma 2-esferada de círculos". Mesmo assim, devemos sublinhar que a 3-esfera S^3 não é um simples produto cartesiano entre S^1 e S^2 – na verdade, quem conhece alguma topologia algébrica, não terá muita dificuldade de mostrar que a variedade $S^1 \times S^2$ tem um tipo de homotopia diferente daquele da 3-esfera. Por isso, a fibração de Hopf tem um caráter topologicamente "torto", como já foi observado geometricamente na Seção 2.3.3 acima.

Teorema 2.5.2. *Existe uma aplicação contínua sobrejetiva $F_H : S^3 \to S^2$ tal que cada órbita do fluxo de Hopf tem a forma $F_H^{-1}(\{p\})$ para um ponto $p \in S^2$.*

Como uma ilustração do teorema, incluímos a Figura 2.5.1, que explica visualmente a aplicação F_H, mostrando exemplos de círculos de Hopf e os pontos na 2-esfera correspondentes.

Para demonstrar o Teorema 2.5.2, aplicaremos o resultado do Teorema 2.3.9 que, essencialmente, diz existir uma correspondência bijetiva entre as órbitas do fluxo de Hopf e os subespaços complexos unidimensionais de $\mathbb{H}$. Intuitivamente, essa correspondência deve ser "contínua", no sentido de que círculos "próximos" um a outro correspondem a subespaços "próximos". Porém, para elaborar um significado rigoroso desta ideia de continuidade, precisamos refletir um pouco sobre o "espaço de todos subespaços unidimensionais" do espaço vetorial bidimensional $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$.

Por analogia com o caso real, cada subespaço vetorial unidimensional de $\mathbb{C}^2$ é o conjunto de soluções da equação linear

$$K_1 z_1 + K_2 z_2 = 0, \tag{2.5.2}$$

onde K_1 e K_2 são constantes complexas. Pelo menos uma das constantes K_1, K_2 tem de ser diferente de zero, senão o conjunto de soluções seria todo $\mathbb{C}^2$. Mas as constantes $(K_1, K_2) \neq (0, 0)$ não são determinadas de modo único pelo subespaço: a equação

$$\lambda K_1 z_2 + \lambda K_2 z_2 = 0$$

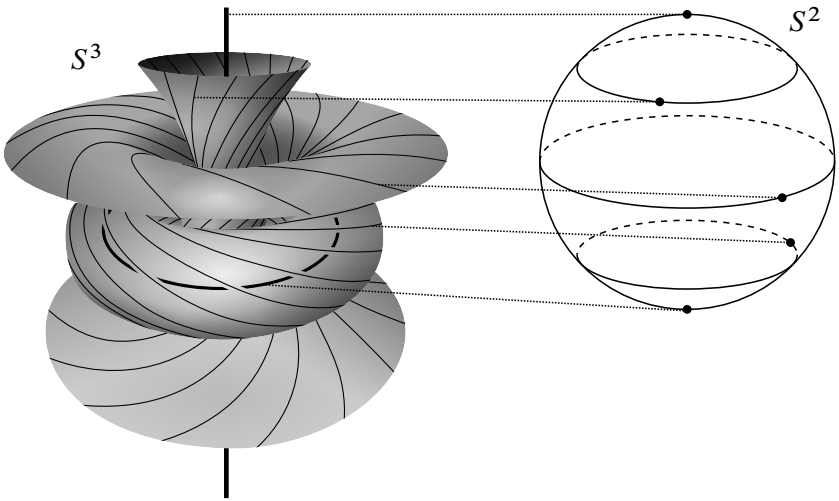


Figura 2.5.1: Uma ilustração da aplicação $F_H : S^3 \to S^2$ que realiza a fibração de Hopf. Cada círculo de Hopf desenhado na parte esquerda da imagem corresponde a um único ponto da 2-esfera. Como exemplo, ligamos alguns dos círculos de Hopf aos pontos correspondentes da 2-esfera com linhas pontilhadas.

tem o mesmo conjunto de soluções para cada $\lambda \neq 0$. Por isso, para descrever os subespaços e não as equações que os determinam, temos de tratar como equivalentes os pares de coeficientes da forma (K_1, K_2) e $(\lambda K_1, \lambda K_2)$.

Definição 2.5.3. O *espaço projetivo complexo* $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ é definido como o espaço de todos os pares ordenados de números complexos diferentes de $(0, 0)$, considerados a menos de multiplicação simultânea de ambos pelo mesmo número não nulo. Em símbolos,

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = \big\{(K_1, K_2) \in \mathbb{C}^2 : (K_1, K_2) \neq (0,0)\big\} \Big/ \begin{array}{l}(K_1, K_2) \sim (\lambda K_1, \lambda K_2) \\ \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.\end{array}$$

Segundo a definição acima, o espaço $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ vem com uma topologia, que resulta da aplicação das seguintes construções: primeiro, consideramos a topologia comum euclidiana em $\mathbb{C}^2$; segundo, passamos a $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ com a topologia do subespaço; finalmente, formamos o quociente (veja a Seção 3.1.2) pela relação de equivalência denotada $\sim$ na equação acima.

Com essa parametrização de subespaços unidimensionais em mãos, podemos

agora considerar o resultado da composição das nossas correspondências bijetivas,

$$\left\{\begin{matrix}\text{órbitas}\\ \text{de } \varphi\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\text{Teorema 2.3.9}} \left\{\begin{matrix} W < \mathbb{C}^2, \\ \dim(W) = 1\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{\text{Definição 2.5.3}} \mathbb{C}\mathrm{P}^1. \tag{2.5.3}$$

Os exercícios abaixo têm como objetivo mostrar que a composição das bijeções (2.5.3) é contínua.

Exercícios 2.5.4. a) Suponha que $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ é um vetor de norma 1, ou seja, que $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, e considere $W = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{(z_1, z_2)\} \subset \mathbb{C}^2$, o subespaço unidimensional gerado por (z_1, z_2). Encontre coeficientes $(K_1, K_2) \neq (0, 0)$ para os quais W é o conjunto de soluções da Equação (2.5.2).

b) Usando o item anterior, escreva a fórmula de uma aplicação $S^3 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, que leva cada vetor (z_1, z_2) de norma 1 ao elemento de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ descrevendo o subespaço complexo unidimensional passando por este ponto.

c) Justifique por que a aplicação construída no item anterior é contínua.

Conforme Definição 2.5.3, os pontos do espaço projetivo $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ são classes de equivalência da forma $[(z_1, z_2)]$. Como é de costume em geometria projetiva, vamos introduzir a seguinte notação:

$$[z_1 : z_2] := [(z_1, z_2)] = \{(\lambda z_1, \lambda z_2) : \lambda \neq 0\}.$$

A notação $[z_1 : z_2]$ refere-se à "proporção" dos dois números complexos, pois o quociente z_1/z_2 não depende da escolha do representante (z_1, z_2) da sua classe de equivalência, desde que $z_2 \neq 0$. Em particular, se $z_2 \neq 0$, podemos multiplicar ambas as coordenadas por $\lambda = z_2^{-1}$, obtendo um novo representante da forma $[\frac{z_1}{z_2} : 1]$. Vamos, então, considerar apenas esses representantes canônicos da forma $[z : 1]$, $z \in \mathbb{C}$, mas temos de adicionar a isso o elemento $[1 : 0]$ que servirá como o representante canônico da classe $\big\{(z_1, 0) : z_1 \neq 0\big\}$. Deste modo,

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = \{[z : 1] : z \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\}.$$

Lema 2.5.5. *O espaço projetivo $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ é homeomorfo à 2-esfera S^2.*

Demonstração. Como mostramos no Exercício 1.4.8, a 2-esfera é homeomorfa à compactificação por um ponto de $\mathbb{R}^2$. Obviamente, $\mathbb{R}^2$ é homeomorfo à $\mathbb{C}$, então

$S^2 \cong \widehat{\mathbb{C}}$, onde $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é a compactificação por um ponto dos números complexos. Por isso, basta considerar a função

$$s : \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \widehat{\mathbb{C}}, \qquad \begin{array}{l} s\big([z : 1]\big) = z, \\ s\big([1 : 0]\big) = \infty. \end{array} \tag{2.5.4}$$

A verificação que s é um homeomorfismo é um (fácil) exercício. □

Exercícios 2.5.6. a) Verifique que a função s definida em (2.5.4) é de fato um homeomorfismo.

b) Dado que cada elemento $[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ representa um subespaço vetorial 1-dimensional $W < \mathbb{C}^2$, qual é a interpretação geométrica de $s([z_1 : z_2])$?

Demonstração do Teorema 2.5.2. Usando o homeomorfismo $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$ estabelecido no Lema 2.5.5, vamos definir a aplicação $F_H : S^3 \to S^2$ como a seguinte composição:

$$F_H = \big(S^3 \xrightarrow{\text{span}} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \xrightarrow{\cong} S^2\big),$$

onde a função denotada "span" leva cada ponto $(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ ao subespaço unidimensional $\text{span}_{\mathbb{C}}\{(z_1, z_2)\} \subset \mathbb{C}^2$, que é interpretado como um elemento do espaço projetivo $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$. Obviamente, um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ gera o espaço unidimensional W se e somente se $\mathbf{v} \in W$. Por isso, o Teorema 2.3.9 implica que as pré-imagens de pontos sob "span" são exatamente as órbitas do fluxo de Hopf. Consequentemente, as "fibras" $F_H^{-1}(\{p\})$, $p \in S^2$, são as órbitas do fluxo de Hopf. □

3 Variedades, colagens e quocientes

Neste capítulo, discutiremos variedades em geral e diferentes formas de construí-las. Variedades são extremamente importantes em matemática e surgem nos contextos mais diversos, sejam eles mais puros, motivados por questões "internas" à matemática, sejam mais aplicados, motivados por relações mais ou menos estreitas da matemática com outras áreas do conhecimento, notadamente a física, mas incluindo muitas outras, como a biologia, a economia, a engenharia etc. Como já vimos fazendo desde o início das notas, continuaremos aqui a cometer, vez por outra, o pecado didático-matemático de utilizar palavras não definidas previamente. Fazemos isso porque escolhemos usar neste texto um estilo algo realista, por assim dizer. Quando fazemos matemática, com frequência, não dominamos todos os assuntos envolvidos no estudo de um problema e, muitas vezes, temos que entender e ser capazes de conectar, ou até, às vezes, de inventar "áreas" diferentes para chegar a resolvê-lo. A discussão que começamos aqui – sobre variedades e seus diversos sabores – é exemplo disso: é um assunto profundo, de grande importância, que relaciona vários aspectos da matemática. Não poderíamos tratá-lo em toda a sua glória em um texto introdutório como esse, mas podemos, sim, discutir alguns de seus aspectos, sem pretensão de sermos exaustivos.

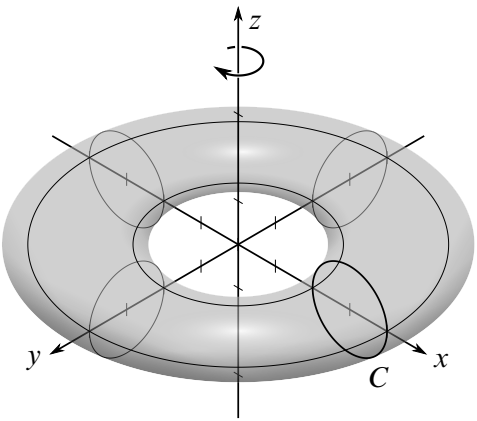


Figura 3.1.1: O toro de revolução, formado a partir do círculo C no plano xz por revolução ao redor do eixo z.

3.1 Exemplos e construções

3.1.1 Toros e outras superfícies

Já vimos vários toros bidimensionais quando discutimos a fibração de Hopf no Capítulo 2 (em particular, na Seção 2.3.3). A forma mais "concreta" de definir toros bidimensionais é como subconjuntos do espaço tridimensional. Por exemplo, como *toros de revolução* obtidos por rotação, ao redor do eixo z em $\mathbb{R}^3$, de um círculo contido no plano coordenado xz, como na Figura 3.1.1.

Exercício 3.1.1. Dando continuidade ao espírito de ter sempre "a mão na massa", obtenha as fórmulas que definem um toro de revolução em $\mathbb{R}^3$.

Mas há uma segunda forma muito comum de se definir um toro: tomamos um retângulo no plano e identificamos seus lados verticais e seus lados horizontais como mostrado na parte esquerda da Figura 3.1.2.

Nós matemáticos chamamos esses dois "objetos" de "toro", mas uma pessoa "normal", apesar de entender prontamente o que é o primeiro toro, tem dificuldade de entender o que queremos dizer quando definimos o segundo e, em particular, de entender por que chamá-lo pelo mesmo nome. Embora todos nós tenhamos percorrido o caminho de um dia termos sido pessoas normais a termos nos tornado, aos poucos, matemáticos, com frequência, ao longo desse processo, aprendemos a esquecer que esses dois toros são, de fato, muito diferentes. Queremos aqui dar mais uma volta nesta parte do parafuso e recuperar, ao menos em parte, a sensação de que não faz sentido chamar os dois toros acima pelo mesmo nome. Ou, pelo menos, queremos identificar claramente o que esses dois toros têm em comum e

de diferente, e não meramente identificar o que têm em comum (a topologia) e esquecer as diferenças (geométricas, por exemplo).

O exercício a seguir é importante e recomendamos que a leitora não o deixe de lado, nem ache que saiba a resposta, a menos que realmente saiba.

Exercício 3.1.2. Considere um hexágono regular no plano e identifique lados opostos como no centro da Figura 3.1.2. Qual superfície é esse quociente?

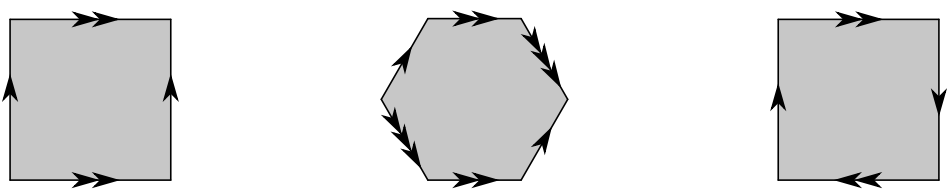


Figura 3.1.2: Esquerda: As identificações indicadas produzem, como quociente, um toro "quadrado" neste caso, ou "retangular", mais geralmente. **Centro:** E aqui, qual superfície resulta das identificações no bordo do hexágono? **Direita:** O quociente deste quadrado é homeomorfo ao plano projetivo, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, quociente de S^2 pela identificação de pontos antipodais. Por quê?

Há, como bem sabemos, várias outras superfícies. Por exemplo, há as esferas bidimensionais e existe também o *plano projetivo*, obtido realizando as identificações indicadas no bordo do quadrado no diagrama à direita na Figura 3.1.2.

Podemos também construir outras superfícies por *soma conexa*: dadas duas superfícies S_1, S_2, removemos um disco de cada uma delas e as colamos ao longo do bordo dos discos removidos, como mostra a Figura 3.1.3.

Na verdade, apesar de nossas melhores intenções ao começar a seção, acabamos embananando tudo e as distinções que gostaríamos de fazer se perderam na bagunça. Voltemos então à nossa disposição inicial e tentemos organizar as ideias e separar as propriedades das quais queremos falar. Devemos começar por esclarecer sob qual ponto de vista queremos considerar os objetos matemáticos que

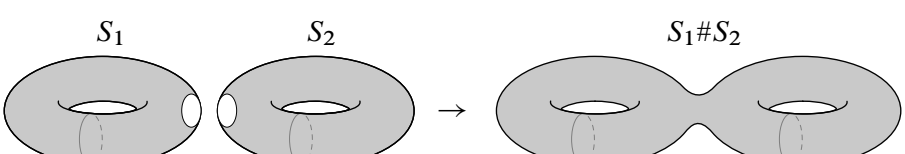


Figura 3.1.3: A soma conexa de duas superfícies.

estamos discutindo, isto é, neste momento, as superfícies. Por exemplo, podemos estar interessados em tratá-las como espaços topológicos apenas e, nesse caso, consideramos duas superfícies *equivalentes* se são *homeomorfas*, isto é, se existe entre elas uma transformação contínua, inversível e com inversa contínua. Recomendamos, então, que o leitor veja um livro de introdução à topologia, como Massey 1991; Munkres 2000 e refresque a memória sobre a *classificação topológica* das superfícies compactas e conexas. O enunciado é o seguinte:

Teorema 3.1.3 (Classificação das superfícies compactas)**.** *Uma superfície compacta e conexa é homeomorfa a uma esfera, ou a uma soma conexa de toros, ou a uma soma conexa de planos projetivos.*

Sob esse aspecto, isto é, se estamos usando óculos topológicos, os dois toros do início da discussão – vamos chamá-los de *toro de revolução* e *toro retangular* – são de fato "os mesmos", isto é, são homeomorfos.

Exercício 3.1.4. Descreva um homeomorfismo explícito entre o toro retangular e o toro de revolução.

Se, no entanto, estivermos com outro tipo de óculos, como, por exemplo, óculos diferenciáveis, holomorfos ou métricos, esses dois toros podem muito bem não mais ser equivalentes. É possível mostrar que os dois toros são metricamente diferentes e são diferenciavelmente equivalentes, mas, do ponto de vista holomorfo, não temos dados suficientes para decidir.

3.1.2 Decomposições e quocientes

Como já fizemos na Seção 3.1.1 com o toro retangular e com o plano projetivo, uma construção comum em topologia são *colagens*. Para formalizarmos esse conceito, realizaremos uma rápida incursão na topologia básica para introduzir equivalências, decomposições e quocientes. Embora esses sejam conceitos que levam a lugares importantes em topologia, nosso principal intuito é nos certificarmos de que o que estamos fazendo não envolve ilegalidades topológicas, podendo, no que segue, utilizá-los sem correr nenhum sério risco.

Uma *decomposição* de um conjunto X é o mesmo que uma *partição* de X, isto é, uma coleção

$$\mathcal{D} = \{X_\alpha \subset X\}$$

de subconjuntos disjuntos e não vazios de X, cuja união é todo o conjunto X. Uma decomposição $\mathcal{D}$ de X é equivalente a uma *relação de equivalência* em X:

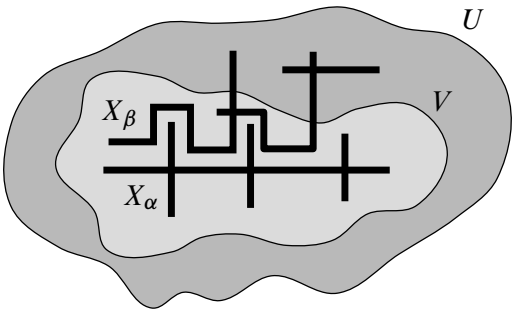


Figura 3.1.4: Em uma decomposição semicontínua superior $\mathcal{D}$, para todo elemento $X_\alpha \in \mathcal{D}$ e toda vizinhança $U \supset X_\alpha$, existe uma vizinhança menor $V \supset X_\alpha$ tal que qualquer elemento $X_\beta \in \mathcal{D}$ que intersecte V está inteiramente contido em U.

dizemos que $x \sim y$ se e somente se x e y pertencem ao mesmo conjunto $X_\alpha \in \mathcal{D}$. O *quociente* de X pela decomposição $\mathcal{D}$, denotado por $X/\mathcal{D}$, é, como conjunto, simplesmente a coleção $\mathcal{D}$, isto é, os elementos de $X/\mathcal{D}$ são os conjuntos $X_\alpha \in \mathcal{D}$.[1] A topologia que usamos em $X/\mathcal{D}$, chamada *topologia quociente*, é a topologia mais fina que faz com que a projeção

$$p\colon X \to X/\mathcal{D}, \quad p(x) = X_\alpha, \quad \text{onde} \quad X_\alpha \ni x,$$

seja contínua, isto é, um conjunto é aberto em $X/\mathcal{D}$ se e somente se é pré-imagem por p de um aberto em X.

Há um tipo especialmente útil de decomposições de espaços topológicos. Uma decomposição $\mathcal{D}$ de X é *semicontínua superior*, abreviado por *scs*, se os conjuntos que a compõem são compactos e se, ademais, tem a seguinte propriedade: dados $X_\alpha \in \mathcal{D}$ e um aberto $U \subset X$, com $U \supset X_\alpha$, existe um aberto $V \subset U$, com $V \supset X_\alpha$, tal que, se $X_\beta \in \mathcal{D}$ é tal que $X_\beta \cap V \neq \varnothing$, então $X_\beta \subset U$: veja a Figura 3.1.4.

Essa definição pode parecer de difícil digestão, mas o exercício a seguir ajuda a assimilá-la. Antes dele, vejamos ainda duas outras definições que também ajudam a compreender o pacote completo. Seja X_n uma sequência de subconjuntos do espaço X. Seu *limite inferior* (veja a Figura 3.1.5) é o conjunto de pontos de X cujas vizinhanças intersectam "quase todos" os X_n, isto é,

$$\liminf X_n := \{x \in X : \forall U \ni x \text{ aberto}, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } X_n \cap U \neq \varnothing,\ \forall n \geqslant N\}.$$

[1] A leitora pode se perguntar por que então usar a notação $X/\mathcal{D}$. Nós também não sabemos, mas essa é a notação usada. Uma vantagem é certa parecença com $X/\sim$, essa sim uma notação mais claramente razoável, que também usaremos a seguir.

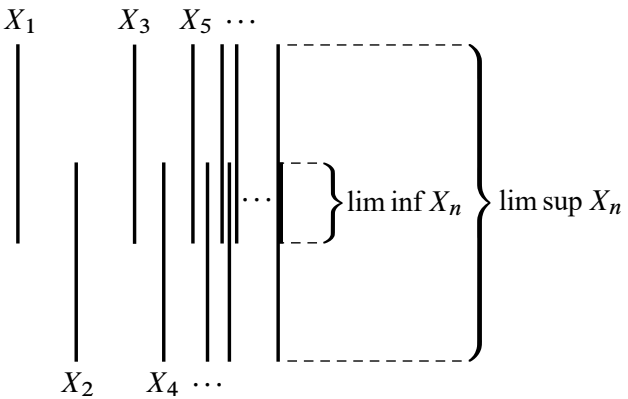


Figura 3.1.5: O limite inferior de uma sequência de conjuntos consiste do conjunto de pontos cujas vizinhanças intersectam quase todos todos os conjuntos da sequência, isto é, não intersectam no máximo um número finito deles. O limite superior da sequência de conjuntos é o conjunto de pontos cujas vizinhanças intersectam uma quantidade infinita de elementos da sequência.

O *limite superior* da sequência X_n é o conjunto de pontos de X cujas vizinhanças intersectam um número infinito de conjuntos X_n, isto é,

$$\limsup X_n := \{x \in X : \forall U \ni x \text{ aberto}, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geqslant N \text{ tal que } X_n \cap U \neq \varnothing\}.$$

Exercícios 3.1.5. Suponha que X é um espaço métrico e $\mathcal{D}$ é uma decomposição scs de X.

a) Mostre que se $x_n, y_n \in X$ são duas sequências de pontos de X que pertencem aos mesmos elementos de $\mathcal{D}$, isto é, se existe uma sequência $X_n \in \mathcal{D}$ de conjuntos tais que $x_n, y_n \in X_n$, e se $x_n \to x$, $y_n \to y$, então existe $X_\beta \in \mathcal{D}$ tal que $x, y \in X_\beta$.

b) Mostre que se X_n é uma sequência de elementos de $\mathcal{D}$ e $X_\beta \in \mathcal{D}$ é tal que $(\liminf X_n) \cap X_\beta \neq \varnothing$, então $\limsup X_n \subset X_\beta$.

O próximo exercício explica o nome das decomposições que estamos discutindo.

Exercício 3.1.6. Consulte um livro de análise para refrescar a memória sobre como se define uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ semicontínua superior. Mostre que f é semicontínua superior se e somente se $\big\{\{x\} \times [0, f(x)] \subset \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\big\}$, a coleção de segmentos verticais entre o eixo horizontal e o gráfio de f, é scs no sentido definido anteriormente. (Suponha que $f(x) \geqslant 0$ para simplificar.)

Observação 3.1.7. Alguns livros exigem que os elementos de decomposições scs sejam conjuntos apenas fechados, ao invés de compactos como fizemos aqui. Essa definição menos exigente levaria a algumas dificuldades com as quais não queremos nos preocupar agora. Isso não quer dizer que não tomaremos quocientes por decomposições cujas classes não são compactas, mas, quando o fizermos, mostraremos que é possível entender tais quocientes como quocientes de subconjuntos compactos por decomposições scs. Mais tarde, quando formos sistematizar a discussão de quocientes por ações de grupos, teremos que lidar com classes de equivalência não compactas e veremos como fazê-lo de maneira eficaz.

Listamos agora duas propriedades simples sobre decomposições. Para tanto, lembramos que uma transformação $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é *fechada* (respectivamente, *aberta*) se as f-imagens de conjuntos fechados (abertos) em X são fechados (abertos) em Y.

Exercício 3.1.8. Suponha que $\mathcal{D}$ é uma decomposição de um espaço topológico X em conjuntos compactos. Mostre que $\mathcal{D}$ é semicontínua superior se e somente se a projeção $p : X \to X/\mathcal{D}$ é fechada.

Uma forma útil de reconhecer o quociente de um espaço topológico por uma decomposição scs é dada pelo seguinte exercício.

Exercício 3.1.9. Suponha que $\mathcal{D}$ é uma decomposição scs de um espaço X e suponha que $f : X \to Y$ é uma transformação contínua, sobrejetiva e fechada tal que $\mathcal{D}$ é a decomposição de X determinada por f, isto é, $\mathcal{D} = \big\{f^{-1}(y) : y \in Y\big\}$. Mostre que $X/\mathcal{D}$ e Y são espaços homeomorfos.

Equipados com os resultados acima, consideremos agora alguns exemplos simples, oferecidos com garantia, mas, como de costume, na forma de exercícios. Ao descrevermos as decomposições, descrevemos apenas seus elementos *não degenerados,* isto é, os conjuntos que não se reduzem a um único ponto, ficando subentendido que os outros elementos da decomposição são pontos individuais que faltam para preencher todo o espaço.

Exercícios 3.1.10. Para cada um dos exemplos a seguir, explique por que a decomposição descrita é semicontínua superior e identifique o espaço quociente usando o Exercício 3.1.9.

a) Em $[0,1]$, $\mathcal{D}_1$ é a decomposição cujo único elemento não degenerado é o intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

b) Em $[0,1]$, $\mathcal{D}_2$ é a decomposição cujos elementos não degenerados são os intervalos da forma $\left[\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right]$, com $n = 1, 2, \ldots$.

c) No quadrado $[0,1]^2$, D_3 é a decomposição em arcos verticais $\{x\} \times [0,1]$, para $x \in [0,1]$.

Para cada um dos exemplos a seguir, explique por que a decomposição descrita não é scs e qual "problema" que isso acarreta no espaço quociente.

a') Em $[0,1]$, $\mathcal{D}'_1$ é a decomposição cujo único elemento não degenerado é o conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

b') Em $[0,1]$, $\mathcal{D}'_2$ é a decomposição cujo único elemento não degenerado é $(0,1]$.

c') Em $[0,1]^2$, $\mathcal{D}'_3$ é a decomposição cujos elementos não degenerados são da forma $\{x\} \times [0,1]$, para $x \in (0,1]$.

Agora listamos algumas propriedades de quocientes por decomposições scs na forma de exercícios. Para fazê-los, a leitora precisa de alguma familiaridade com a teoria de topologia básica que não vamos discutir aqui. Um espaço topológico é *metrizável* se possui uma métrica que induz a mesma topologia, e é *separável* se contém um subconjunto enumerável denso. Como já vimos anteriormente, um espaço topológico é *Hausdorff* se, para cada par de pontos distintos, é possível encontrar abertos disjuntos que os contêm (cada ponto em um aberto). Embora espaços que não satisfaçam essas três propriedades apareçam em outros contextos, não os discutiremos aqui. Os exercícios a seguir são úteis para estarmos seguros de que, ao tomarmos quocientes, não criamos topologias "desagradáveis".

Exercícios 3.1.11. Prove as seguintes afirmações:

a) Se X é Hausdorff e $\mathcal{D}$ é scs, então $X/\mathcal{D}$ é Hausdorff.

b) Se X é metrizável e $\mathcal{D}$ é scs, então $X/\mathcal{D}$ é metrizável. Em particular, se X é separável e metrizável e $\mathcal{D}$ é scs, então $X/\mathcal{D}$ é separável e metrizável.

Nas construções envolvendo colagens, que discutiremos na Seção 3.3.1, em geral tomaremos quocientes, por decomposições scs, de espaços métricos compactos, de modo que os quocientes serão metrizáveis compactos. Esse é, provavelmente, o tipo de espaço mais agradável de se lidar do ponto de vista topológico.

Agora podemos voltar aos exemplos da Seção 3.1.1 e formalizar as identificações lá discutidas, usando a linguagem de decomposições.

Exercício 3.1.12. Para os exemplos do toro retangular, do plano projetivo e do *(spoiler)* toro hexagonal, relacione as identificações descritas na Seção 3.1.1 com decomposições scs. Em cada um dos casos, descreva sequências de elementos X_n da decomposição respectiva para as quais existe um elemento X_β de forma que $\liminf X_n = \limsup X_n \subsetneq X_\beta$.

Antes de seguirmos adiante, deixamos aqui um último exercício interessante, mas não diretamente relacionado com o assunto dessas notas. O *conjunto ternário de Cantor* é o subconjunto C do intervalo $[0,1]$ obtido da seguinte maneira. Seja $K_0 = [0,1]$ e defina K_n indutivamente retirando de cada componente conexa de K_{n-1} seu terço central aberto, isto é, de cada componente conexa J de K_{n-1}, retiramos o intervalo aberto com o mesmo ponto central que J, de comprimento igual a um terço do comprimento de J. Assim, $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ etc. Definimos

$$C = \bigcap_{n \geqslant 0} K_n.$$

Por ser uma interseção encaixada de compactos não vazios, C é um compacto não vazio. Além disso, C é *totalmente desconexo*, isto é, suas componentes conexas são todas pontos, e *perfeito*, isto é, todos os seus pontos são pontos de acumulação (não triviais, ou seja, de sequências não constantes). Os extremos de todos os intervalos removidos na construção dos conjuntos K_n são todos pontos de C já que jamais são removidos em conjuntos K_m subsequentes. Seja $\mathcal{D}$ a decomposição de C cujos conjuntos não triviais (isto é, com mais de um ponto) são exatamente os extremos dos intervalos abertos removidos: $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$, $\{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\}$, $\{\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\}$ etc.

Exercício 3.1.13. Mostre que $\mathcal{D}$ é scs e que $C/\mathcal{D}$ é homeomorfo ao intervalo $[0,1]$. Você conhece uma função que realiza a identificação?

3.1.3 Exemplos em dimensão 3

Vejamos agora alguns exemplos de decomposições semicontínuas superiores em dimensão 3. Como na Seção 3.1.1, descreveremos identificações em alguns espaços topológicos simples, como subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ (como a 3-esfera). Deixamos para o leitor verificar que as identificações correspondem a decomposições scs desses espaços e que os quocientes por essas identificações são, portanto (Exercícios 3.1.11), espaços compactos metrizáveis.

O 3-toro

No cubo unitário, identificamos o lado direito com o esquerdo, o da frente com o de trás, e o de cima com o de baixo. Isto é, $X = [0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$, e identificamos dois pontos $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (no bordo de X) se sua diferença $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ é um vetor com coordenadas inteiras. Quais vetores ocorrem como tais diferenças?

Imagine-se, por um momento, em um espaço como esse, onde não há gravidade. Isto é, imagine-se em um quarto cúbico no qual ao andar (voar, na verdade) para a direita você não colide com a parede direita, mas reaparece na mesma posição da parede esquerda. Isso tudo sem que você se sinta rasgado ao meio ao atravessar a parede. Na verdade, você sequer percebe que qualquer coisa mudou ao "atravessar" a parede. A mesma descrição se aplica às outras paredes do quarto. Imagine-se agora parada, olhando para a esquerda. O que você vê? E ao olhar para frente ou para cima? Lembre-se daqueles elevadores que têm todas as paredes cobertas por espelhos, embora não seja exatamente a mesma coisa que vemos.

Exercício 3.1.14. Para melhor entendermos quocientes como o 3-toro, é útil descrever os quocientes das diversas "partes" do cubo com que começamos. Faça-o, isto é, descreva os quocientes dos conjuntos dos 8 vértices, das 12 arestas e das 6 faces e tente juntar todos esses quocientes numa mesma "imagem" dentro do 3-toro.

O espaço projetivo de dimensão 3

Na 3-esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, identificamos pontos antipodais, isto é, $\mathbf{x}$ e $-\mathbf{x}$. Já mencionamos anteriormente que esse quociente, o espaço projetivo tridimensional $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$, pode ser obtido de outra forma: em $\mathbb{R}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ identificamos $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ se existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$. Certifique-se de que ambos os quocientes são realmente os mesmos. É possível dar uma descrição do segundo quociente em termos de decomposições scs?

Imagine-se agora voando com uma amiga dentro de $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Vocês conversam um pouco e ela resolve ir pra casa. Vocês se despedem, ela vira as costas pra você, aciona seu propulsor e começa a se afastar enquanto você a observa. Sua imagem diminui aos poucos, mas, após alguns minutos, você ouve um chiado atrás de si. Ao se virar, vê sua amiga de cabeça pra baixo quase encostada em você, amarrando os cadarços dos seus tênis um no outro.

Dois toros sólidos e dois quocientes

Como anteriormente, definimos o *toro sólido* por

$$T := S^1 \times D^2 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$$

onde S^1 e D^2 são o círculo e o disco fechado unitários em $\mathbb{R}^2$, respectivamente, isto é,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \quad \text{e} \quad D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$$

O bordo de T é o toro bidimensional $\partial T = S^1 \times \partial D^2 = S^1 \times S^1$.

Nesses exemplos, o espaço X é a união disjunta de duas cópias de T, e vamos definir duas formas de identificar pontos do bordo de X, união disjunta de dois toros bidimensionais. Para facilitar a descrição, seja $X = T_1 \sqcup T_2$, onde T_1, T_2 são duas cópias de T e $\sqcup$ indica união disjunta, de forma que $\partial X = \partial T_1 \sqcup \partial T_2$. Definimos as duas maneiras seguintes de identificar pontos em ∂X:

$$\partial T_1 \ni (z, w) \sim (w, z) \in \partial T_2 \quad \text{e} \quad \partial T_1 \ni (z, w) \approx (z, \overline{w}) \in \partial T_2,$$

onde estamos usando as coordenadas provenientes do homeomorfismo dos bordos $\partial T_1, \partial T_2$ com $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$. A leitora, tendo lido a descrição da fibração de Hopf na Seção 2.3.4, certamente desconfiou que uma dessas identificações deve produzir a 3-esfera, sendo esse, de fato, o caso para $\sim$. O quociente de X por $\approx$ é um espaço tridimensional diferente, do qual ainda não falamos aqui (embora o tenhamos mencionado rapidamente na Seção 2.5): $X/\!\approx$ é homeomorfo ao produto $S^1 \times S^2$, como veremos mais adiante. Para entender por que isso é verdade, note que a identificação $(z, w) \approx (z, \overline{w})$ é, obviamente, o produto da identidade na primeira coordenada com a equivalência $w \approx_2 \overline{w}$ na segunda coordenada. Lembrando que w é um ponto no bordo do disco unitário D^2, indicamos na Figura 3.1.6 a colagem de dois discos ao longo de seus bordos pela equivalência $w \approx_2 \overline{w}$, tendo feito uma rotação no disco da direita (aquele onde está $\overline{w}$) para facilitar a visualização. Fica claro da figura que o resultado da colagem é uma 2-esfera e, portanto, que

$$(T_1 \sqcup T_2)\,/\!\approx \text{ é homeomorfo a } S^1 \times S^2.$$

Exercício 3.1.15. Verifique que o quociente $(T_1 \sqcup T_2)\,/\!\sim$ descrito acima é, de fato, homeomorfo à 3-esfera, isto é, que a equivalência $\sim$ induz a mesma identificação descrita na Seção 2.3.4.

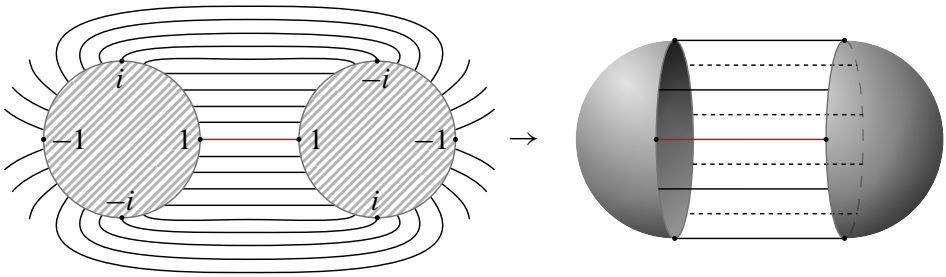


Figura 3.1.6: No diagrama à esquerda, representamos dois discos unitários colados ao longo do bordo pela identificação $w \sim \overline{w}$. Rodamos o segundo disco por 180° para facilitar a visualização das identificações indicadas pelas linhas unindo w e $\overline{w}$. Do lado direito, deformamos as identificações no espaço para tornar evidente que a colagem tem como resultado uma 2-esfera.

Um dodecaedro e dois quocientes

O dodecaedro é um dos cinco sólidos platônicos, ao lado do tetraedro, do cubo, do octaedro e do icosaedro. Trata-se de um sólido regular convexo cujas 12 faces são pentágonos regulares, como na imagem esquerda da Figura 3.1.7. Para entender melhor o que diremos a seguir, seria muito útil que o leitor se familiarize um pouco com dodecaedros. As faces pentagonais do dodecaedro podem ser agrupadas em pares paralelos, mas, ao contrário de um cubo ou paralelepípedo, os pares estão "fora de fase", por assim dizer, isto é, se simplesmente transladamos uma face paralelamente até o plano da outra, os vértices dos pentágonos se alternam simetricamente, como no lado direito da Figura 3.1.7. Assim, se quisermos nos inspirar na construção do 3-toro para fazer algo similar com o dodecaedro, temos que explicar como alinhar os vértices ao identificarmos faces opostas. Mencionaremos aqui duas formas de fazê-lo, cujos espaços quocientes são bem conhecidos e têm nomes bonitos: são os *espaços dodecaédricos* de *Poincaré* e de *Seifert–Weber*.

A primeira forma de identificar faces opostas de um dodecaedro é fazê-lo da forma mais simples possível: escolha um sentido de rotação, digamos anti-horário, e identifique pentágonos opostos com a mínima rotação necessária, no sentido anti-horário, para fazer os vértices se alinharem, isto é, rotação por $\frac{2\pi}{10}$ radianos. É importante notar que isso, de fato, faz sentido: olhando para a face F, rodá-la por ângulo $\frac{2\pi}{10}$ radianos no sentido anti-horário para identificá-la com a face paralela F' produz a mesma identificação obtida fazendo o oposto, isto é, olhando para a face F', rodá-la por ângulo $\frac{2\pi}{10}$ radianos no sentido anti-horário para identificá-la com a face F. Denotaremos o quociente do dodecaedro por essas identificações,

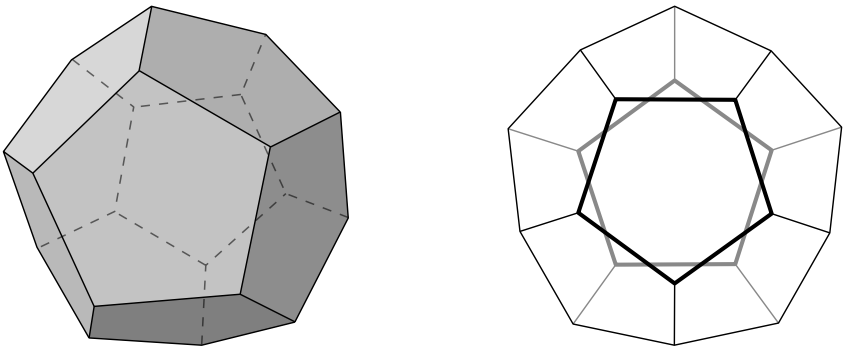


Figura 3.1.7: Esquerda: Vista geral de um dodecaedro, em perspetiva. **Direita:** Projeção ortogonal de um dodecaedro sobre o plano equidistante a duas faces paralelas.

o espaço dodecaédrico de Poincaré como o chamamos acima, por $\mathcal{P}$.

A Figura 3.1.8 mostra 11 das 12 faces do dodecaedro. A décima segunda face é a parte de fora do diagrama e deve ser pensada passando pelo infinito, por trás da nuca da leitora. A face oposta a esta é o pentágono central, que é quase um pentágono euclidiano, etiquetado com $\mathcal{I}$. Olhando de onde estamos, os vértices do pentágono atrás de nossas nucas recebem uma rotação de $\frac{\pi}{5}$ para serem alinhados com os vértices de $\mathcal{I}$. Recomendamos que a leitora verifique as outras identificações e certifique-se que está tudo certo, de acordo com a descrição acima para formar o espaço $\mathcal{P}$: cada pentágono é identificado com o pentágono paralelo por uma rotação de $\frac{\pi}{5}$.

Cometeremos a seguir um sem número de pecados didático-matemáticos para mencionar um fato de enorme importância histórica. É possível mostrar que o grupo fundamental de $\mathcal{P}$ é o *grupo icosaédrico binário* $2I$, um grupo de 120 elementos, obtido tomando a pré-imagem, pelo recobrimento duplo $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$, discutido no Corolário 2.4.5, do subgrupo de SO(3) composto pelas simetrias por rotações do dodecaedro. Como $2I$ é um grupo *perfeito*, isto é, igual a seu subgrupo de comutadores, a abelianização de $2I$ é trivial. Disso segue que $\mathcal{P}$ é uma *esfera homológica*, isto é, um espaço cujos grupos de homologia são iguais aos da 3-esfera, mas que não é homeomorfo à 3-esfera. Poincaré, em um artigo de 1900, perguntou-se se os grupos de homologia, que ele próprio havia inventado baseado no trabalho de Enrico Betti, eram capazes de identificar a 3-esfera. Alguns anos mais tarde, em 1904, Poincaré descreveu o espaço $\mathcal{P}$, mostrando que homologia não era suficiente e perguntou se os grupos de homotopia, então, fariam o trabalho. A resposta afirmativa a essa pergunta ficou conhecida como a *Conjectura de*

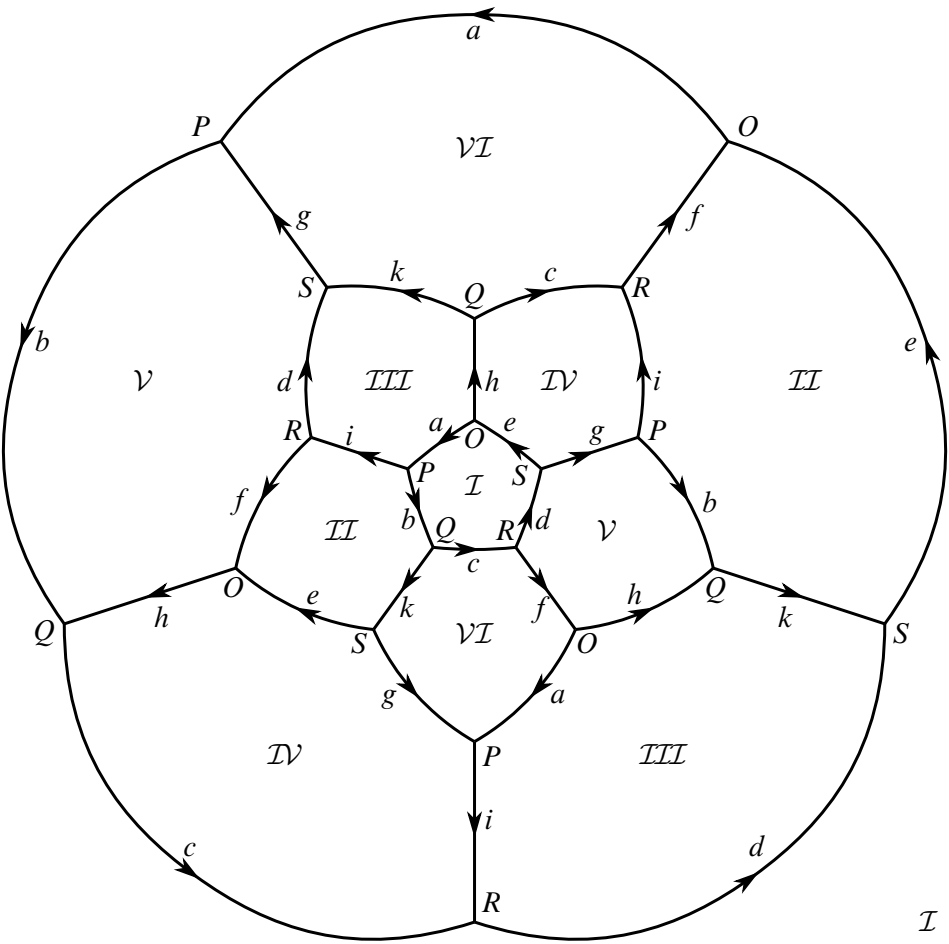


Figura 3.1.8: O diagrama de identificações das faces de um dodecaedro cujo quociente é o espaço dodecaédrico de Poincaré. A figura foi obtida primeiro fazendo projeção central de um dodecaedro inscrito em S^2 e depois fazendo a projeção estereográfica do "dodecaedro esférico" assim obtido (com um pequeno ajuste final nas arestas externas para que o desenho coubesse na página). Começando pela face central $\mathcal{I}$ e etiquetando os cinco vértices como indicado obtemos, das identificações de faces, etiquetas para todos os vértices do dodecaedro. As etiquetas das cinco arestas do pentágono $\mathcal{I}$ não são suficientes para etiquetar todas as arestas do dodecaedro e ainda são necessárias cinco etiquetas adicionais. O espaço quociente tem, portanto, 5 vértices, 10 arestas, 6 faces e 1 "volume tridimensional". Note que $5-10+6-1=0$.

Poincaré.

O espaço dodecaédrico de Seifert–Weber é construído de forma análoga ao espaço de Poincaré, identificando-se faces paralelas do dodecaedro, só que, ao invés de rodá-las o mínimo necessário para que os vértices fiquem alinhados, rodamos cada face pelo ângulo $\frac{3\pi}{5}$ no sentido anti-horário, digamos, antes de identificá-la com a face oposta.

Exercício 3.1.16. Faça uma figura análoga à Figura 3.1.8 para as identificações do espaço de Seifert–Weber. Inclua as informações análogas às da legenda naquela figura: quantos vértices, arestas, faces e faces tridimensionais tem o quociente? E quanto é a soma alternada desses números?

Agora um octaedro

Considere agora um octaedro regular como na esquerda da Figura 3.1.9 e, ao invés de identificar faces paralelas, identificaremos os quatro triângulos da parte superior com os quatro da parte inferior da seguinte maneira. O vértice **1** é identificado com o vértice **i**, e os quatro vértices centrais são identificados de modo a colar cada triângulo superior com o triângulo inferior obtido por uma rotação de $-\frac{\pi}{2}$. Mais precisamente colamos os triângulos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{1}\,\bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{k}] &\leftrightarrow [\mathbf{i}\,\bar{\mathbf{k}}\,\bar{\mathbf{j}}] \\
[\mathbf{1}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}] &\leftrightarrow [\mathbf{i}\,\bar{\mathbf{j}}\,\mathbf{k}] \\
[\mathbf{1}\,\mathbf{j}\,\bar{\mathbf{k}}] &\leftrightarrow [\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}] \\
[\mathbf{1}\,\bar{\mathbf{k}}\,\bar{\mathbf{j}}] &\leftrightarrow [\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\bar{\mathbf{k}}]
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Exercício 3.1.17. Verifique que o quociente tem 2 vértices, 5 arestas, 4 faces e 1 face tridimensional. Efetue: $2 - 5 + 4 - 1 = __$.

Esse exemplo é um em uma família importante de exemplos de 3-variedades, chamadas *espaços lenticulares*, que tiveram especial importância no início do desenvolvimento da topologia algébrica e da topologia geométrica. Voltaremos a eles na Seção 4.5.1. A escolha dos nomes para os vértices na parte esquerda da Figura 3.1.9, em particular, será esclarecida na Seção 3.1.4.

Um exemplo mais enroscado (*d'après* Bill Thurston)

O próximo exemplo tem também grande importância histórica, mas na história mais recente da topologia e geometria de 3-variedades. Aliás, ele talvez seja um

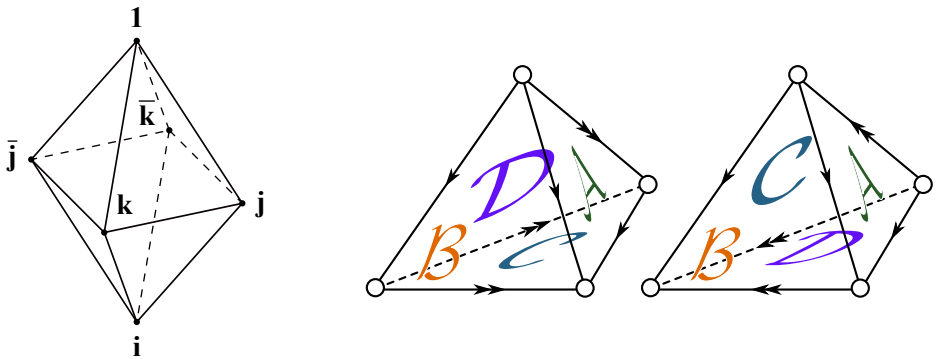


Figura 3.1.9: Esquerda: O octaedro no bordo do qual fazemos as identificações (3.1.1). **Direita:** Instruções para a colagem de dois tetraedros que, após remover o vértice, produz o complemento do nó figura oito em S^3.

marco importante na reunião entre a topologia e a geometria de 3-variedades, que haviam andado afastadas uma da outra.

O exemplo consiste do pareamento das faces de dois tetraedros como mostra a parte direita da Figura 3.1.9.

Exercício 3.1.18. Verifique que o espaço quociente tem 1 vértice, 2 arestas, 4 faces e 2 faces tridimensionais e efetue $1 - 2 + 4 - 2 = __$.

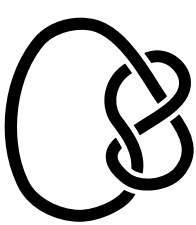


Figura 3.1.10: Projeção do nó figura oito.

Ao contrário dos exemplos anteriores, esta soma não é 0. Faremos um pequeno interlúdio topológico para explicar, ao menos em parte, o que está acontecendo. A *característica de Euler* é um invariante de espaços topológicos que pode ser definido de várias maneiras diferentes. No caso de um espaço tridimensional M, se decompomos M em vértices, arestas, faces e faces tridimensionais, como temos feito (há regras simples a serem respeitadas, mas elas o foram em todos os casos), a característica de Euler $\chi(M)$ é a soma alternada que calculamos nos exemplos acima: $V - A + F - T$, onde V é o número de vértices, A o número de arestas, F o número de faces (bidimensionais) e T o número de faces tridimensionais. É um resultado de topologia que discutiremos mais tarde que a característica de Euler de toda 3-variedade compacta, sem bordo, é 0. Por um lado, isso pode ser visto como

má notícia já que quer dizer que a característica de Euler, que pode ser usada para *classificar* as superfícies compactas, é pouco útil para distinguir 3-variedades. Por outro lado – e é assim que a usamos aqui, ela pode ser útil para apontar espaços que não são 3-variedades, como é o caso com a identificação de tetraedros que explicamos acima. Veremos que essa identificação produz, ao remover o único vértice do quociente, um modelo topológico para o complemento, na 3-esfera, do nó figura 8 mostrado na Figura 3.1.10.

3.1.4 Exemplos de quocientes pela ação de grupos

Toros

Uma outra forma muito comum em que encontramos quocientes em matemática são quocientes por ações de grupos. Talvez o exemplo mais simples seja o quociente do grupo de Lie $\mathbb{R}$ (sim, pode parecer pedante, mas $\mathbb{R}$ é, afinal, um grupo de Lie) pela ação (à direita ou à esquerda, tanto faz) do subgrupo (discreto) $\mathbb{Z} < \mathbb{R}$: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é o quociente de $\mathbb{R}$ pela relação que declara equivalentes dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + n$ ou, o que dá no mesmo nesse caso, se $y - x \in \mathbb{Z}$. Quocientes como esses, com frequência, não podem ser descritos, ao menos diretamente, com a linguagem de decomposições scs já que as classes de equivalência são, como no exemplo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, não compactas. Apesar disso, como já mencionamos anteriormente, nos casos que mais nos interessam, é possível realizar o mesmo quociente como o quociente de um subconjunto compacto do espaço por uma decomposição scs e, portanto, colher os benefícios (em particular, tranquilidade topológica) que tais quocientes nos proporcionam. No exemplo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, fazemos isso observando que toda classe de equivalência tem um representante no intervalo $[0, 1]$, já que, dado $x \in \mathbb{R}$, sempre podemos encontrar $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + n \in [0, 1]$. Por outro lado, com exceção de 0 e 1, que são equivalentes, não há nenhum outro par de pontos equivalentes no intervalo $[0, 1]$. Disso podemos concluir que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pode ser entendido como o quociente do intervalo $[0, 1]$ pela decomposição cujo único conjunto não degenerado é o par $\{0, 1\}$. E chegamos, assim, ao círculo $[0, 1]/(0 \sim 1)$ (lembre-se da Figura 1.2.1) ou, pelo menos, a *um* círculo topológico, já que $[0, 1]/(0 \sim 1)$ certamente não é *igual* ao círculo unitário $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Uma outra forma de obter um círculo é tomando o quociente do grupo multiplicativo dos reais positivos pela ação de um subgrupo multiplicativo da forma $\{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}$, onde λ é um real positivo. Do ponto de vista topológico, todos esses (e quaisquer outros) círculos são os mesmos, isto é, são todos homeomorfos uns aos outros. Mas, como já mencionamos na Página 91, nem só de óculos

topológicos vivem os matemáticos. Poderíamos estar interessados em propriedades métricas, por exemplo, e, nesse caso, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e S^1 são diferentes porque têm comprimentos diferentes, enquanto $\mathbb{R}_+/\langle\lambda\rangle$ sequer tem uma métrica natural (ao menos não uma imediatamente natural), embora tenha uma estrutura afim natural, por construção.

Exercício 3.1.19. a) Mostre que é possível definir uma métrica em $[0,1]/(0 \sim 1)$ que é compatível com a topologia quociente. Dito dessa forma, há muitas maneiras de fazê-lo. Façamos, então, algo melhor definido: mostre que é possível usar a métrica usual em $\mathbb{R}$ para definir uma distância entre as classes de equivalência $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$; em seguida convença-se de que essa definição é, na verdade, uma métrica em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

b) Tente o mesmo truque com o quociente multiplicativo $\mathbb{R}_+/\langle\lambda\rangle$.

Há, claro, vários outros quocientes com os quais somos familiares. O toro bidimensional, por exemplo, obtido por identificação dos lados do quadrado $[0,1]^2$ como no diagrama à esquerda na Figura 3.1.2 é, simplesmente, uma versão bidimensional do círculo $[0,1]/(0 \sim 1)$, que acabamos de discutir e pode, portanto, ser descrito como o quociente do grupo de Lie $\mathbb{R}^2$ pela ação do subgrupo $\mathbb{Z}^2$. Aliás, essa mesma descrição aplica-se a qualquer dimensão e podemos definir o toro n-dimensional como o quociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. A descrição do 3-toro na Seção 3.1.3, em particular, descreve também o quociente $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

Exercícios 3.1.20. a) Considere em $\mathbb{C}$ a ação do subgrupo cíclico aditivo gerado por um elemento $b \neq 0$, isto é, $\langle b\rangle = \{nb : n \in \mathbb{Z}\}$. O que é o quociente $\mathbb{C}/\langle b\rangle$, isto é, o quociente de $\mathbb{C}$ pela relação de equivalência $z \sim w \iff z - w = nb$ para algum $n \in \mathbb{Z}$?

b) Agora considere em $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a ação do subgrupo cíclico multiplicativo gerado por um elemento $a \neq 0$ com $|a| \neq 1$, isto é, $\langle a\rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$. O que é o quociente $\mathbb{C}^*/\langle a\rangle$, isto é, o quociente de $\mathbb{C}$ pela relação de equivalência $z \sim w \iff zw^{-1} = a^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$?

c) As construções nos itens anteriores são muito parecidas e, no entanto, seus quocientes são topologicamente muito diferentes (um é compacto e o outro não). Por quê? Considere também o caso de $|a| = 1$. O que pode acontecer?

d) Considere, em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, o conjunto de todas as retas paralelas de uma dada inclinação e estude as projeções desse conjunto pelos dois quocientes dos itens

anteriores. Explique como as projeções dependem dos parâmetros b, a e da inclinação das retas.

O que foi discutido até aqui suscita algumas questões naturais como, por exemplo, se há ações de grupos que realizam os dois outros diagramas na Figura 3.1.2. Mais geralmente, quais grupos produzem "bons" quocientes? Aliás, o que exatamente devemos considerar um "bom quociente"? As perguntas são muitas e respondê-las leva tempo e dá trabalho, de modo que, ao invés de tentar fazê-lo, continuaremos, por enquanto, nos divertindo com exemplos.

Quocientes de esferas

O subgrupo mais simples de SU(2) (que não é o subgrupo trivial consistindo do elemento neutro apenas) é o subgrupo de dois elementos $\{\pm\mathbf{1}\}$. Como vimos, há duas maneiras de interpretar o quociente $\mathrm{SU}(2)/\{\pm\mathbf{1}\}$. Podemos entendê-lo como grupo, já que $\{\pm\mathbf{1}\}$ é um subgrupo normal e, como vimos no Corolário 2.4.5, o grupo quociente é SO(3). Por outro lado, podemos pensar em SU(2) como S^3 e na identificação por $\pm\mathbf{1}$ como a identificação de pontos antipodais, cujo quociente é $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

Algo que já poderíamos ter mencionado é que, na Seção 2.5, vimos que o quociente de S^3 pelo fluxo de Hopf é a 2-esfera, ou, mais precisamente, que o quociente de SU(2) pela ação à esquerda do subgrupo $S^1 \simeq \{\cos t + \operatorname{sen} t\,\mathbf{i}\}$ pode ser identificado com o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, esse último homeomorfo à 2-esfera. É importante pontuar que esse exemplo é diferente dos anteriores, pois o grupo agindo em SU(2), ao contrário de todos os que discutimos até aqui, *não é discreto*. Já havíamos mencionado parenteticamente, mas sem enfatizar, que os subgrupos $\mathbb{Z}^n < \mathbb{R}^n$, por exemplo, são discretos: $\mathbb{R}^n$ tem uma topologia e, como subconjunto, $\mathbb{Z}^n$ é discreto em $\mathbb{R}^n$. O mesmo vale, obviamente, para $\{\pm\mathbf{1}\} < \mathrm{SU}(2)$. Isso reflete-se no fato de que as dimensões[2], por exemplo, dos toros $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ou dos espaços projetivos $S^n/\pm\,\mathrm{id}$ são as mesmas de $\mathbb{R}^n$ e S^n (isto é, n), enquanto que o quociente $\mathrm{SU}(2)/S^1$ tem dimensão $3-1=2$. Em ambos os casos, vale que a dimensão do quociente é a diferença entre as dimensões do grupo e do subgrupo pelo qual tomamos o quociente, já que conjuntos discretos têm dimensão zero.

O segundo subgrupo mais simples de SU(2) é o grupo de quatro elementos $\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}\}$.[3] O que é o quociente $\mathrm{SU}(2)/\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}\}$?

[2]Mais um pecadilho didático-matemático: não discutiremos dimensões aqui e apelamos à intuição e aos conhecimentos prévios do leitor

[3]Há controvérsias: há quem diga que o segundo subgrupo mais simples de SU(2) é, na verdade, $\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{j}\}$, e há ainda os subversivos radicais que afirmam que esta distinção pertence a $\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{k}\}$.

Exercícios 3.1.21. Desenhe, em $\mathbb{R}^3$, as imagens dos quatérnios unitários $\pm\mathbf{1}$, $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ e $-\mathbf{k}$ por projeção estereográfica de S^3 a partir de $\mathbf{k}$. Nas coordenadas usuais, os dois eixos horizontais contêm $\pm\mathbf{1}$ (eixo real) e $\pm\mathbf{i}$ (eixo $\mathbf{i}$), enquanto que o eixo vertical contém $\pm\mathbf{j}$ e $-\mathbf{k}$. Multiplicação por $\mathbf{i}$ à esquerda torna-se então uma rotação por ângulo $\frac{\pi}{2}$ ao redor do eixo vertical. Considere agora o quarto-espaço no qual as coordenadas real e $\mathbf{i}$ são positivas e a coordenada vertical é qualquer. Juntando o ponto no infinito a esse quarto-espaço, obtemos um octaedro topológico, cujos vértices são $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \pm\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$ (a origem) e $\mathbf{k}$ (o ponto no infinito). Por multiplicação por $\mathbf{i}$, o semiplano vertical contendo o semieixo real positivo é levado ao semiplano vertical, que contém o semieixo $\mathbf{i}$ positivo. Descreva as identificações das faces triangulares que a multiplicação por $\mathbf{i}$ induz e compare com as identificações em (3.1.1).

Outros tipos de ações

Os quocientes por ações de grupos, que discutimos até aqui, foram sempre ações de subgrupos agindo (à esquerda, digamos) no grupo que os contém. Ações de grupos em geral, no entanto (refresque a memória na Página 77), não requerem que o grupo que age aja em um grupo que o contém como subgrupo. Grupos podem agir em conjuntos em geral e essa é, de fato, uma maneira muito comum em que ações ocorrem.

Como um primeiro exemplo, considere o grupo $\mathrm{Afim}(\mathbb{R}^2)$ de transformações afins do plano, isto é, transformações da forma

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

onde A é uma matriz real 2×2 inversível, isto é, $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. A operação em $\mathrm{Afim}(\mathbb{R}^2)$ é por composição e, é claro, $\mathrm{Afim}(\mathbb{R}^2)$ age à esquerda em $\mathbb{R}^2$. Tomamos o subgrupo $G < \mathrm{Afim}(\mathbb{R}^2)$ gerado pelas duas transformações $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ e $(x, y) \mapsto (-x, y + 1)$.

Exercício 3.1.22. Descreva o quociente de $\mathbb{R}^2$ pela ação do grupo G definido acima. *Atenção:* Esse não é um espaço que vimos anteriormente nessas notas.

O segundo exemplo é, na verdade, a ponta de um enorme e riquíssimo iceberg ou até mesmo de vários icebergs. Vimos, na Seção 1.3.6, que o grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ de matrizes reais 2×2 com determinante 1 (onde identificamos as matrizes $\pm A$) age no plano complexo por transformações lineares fracionárias:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Não é difícil verificar (faça-o) que a ação preserva o semiplano superior, isto é,

$$\mathrm{Im}(z) > 0 \iff \mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0$$

Definimos o *grupo modular* como o subgrupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, isto é, o subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ cujas matrizes têm entradas inteiras.

Exercícios 3.1.23. a) Verifique que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ é um subgrupo discreto do grupo de transformações $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. *Sugestão:* Estranho seria se algo envolvendo $\mathbb{Z}$ não fosse discreto.

b) Mostre que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ é gerado pelas duas matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sugestão: Comece calculando vários produtos dessas matrizes com elas mesmas, uma com a outra, suas inversas, etc. Depois pense em como provar que qualquer matriz com coeficientes inteiros e determinante 1 pode ser assim obtida.

c) As transformações lineares fracionárias correspondentes às matrizes do item acima são

$$z \mapsto z+1 \quad \text{e} \quad z \mapsto -\frac{1}{z}$$

respectivamente, de modo que essas duas transformações geram um subgrupo de $\mathrm{TLF}(\mathbb{R})$ isomorfo ao grupo modular. Estude o que acontece, sob a ação das transformações acima, com a configuração de semicírculo e semirretas mostrada na Figura 3.1.11.

3.1.5 Decomposições ou ações?

Nas seções anteriores discutimos duas formas de construir quocientes interessantes e mostramos que, com frequência, é possível relacionar as duas e mostrar que os quocientes são "os mesmos", expressão esta que se refere, no mínimo, a serem espaços homeomorfos. Fazemos aqui algumas ponderações adicionais sobre as vantagens e desvantagens de cada descrição, que vão além da importância de se observar o mesmo fenômeno de diversos pontos de vista diferentes, algo básico para o entendimento humano em geral, e para a compreensão da matemática em particular.

A maneira que usamos para relacionar o quociente de um espaço X pela ação de um grupo discreto G com uma decomposição scs de um conjunto compacto consistiu em encontrar um subconjunto $K \subset X$ com a propriedade de que todas as G-órbitas, isto é, os conjuntos do tipo $G \cdot x = \{g \cdot x : x \in X\}$, para $x \in X$, intersectam K em exatamente um ponto. Um conjunto com essa propriedade é chamado de *conjunto fundamental* para a ação de G em X.[4] Se o fecho $\overline{K}$ é compacto e é um conjunto "razoável" (igual ao fecho de seu interior, por exemplo), como sempre aconteceu nos exemplos que discutimos, obtemos uma relação de equivalência no bordo de K, declarando dois pontos em ∂K equivalentes se pertencem à mesma G-órbita e estendendo essa relação a uma relação de equivalência por transitividade. A decomposição scs de $\overline{K}$ consiste das classes dessa equivalência.

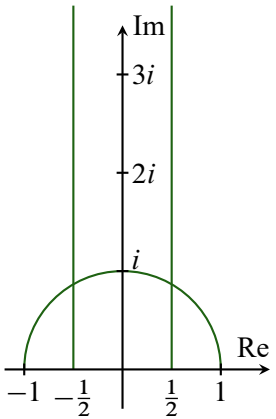


Figura 3.1.11: Semirretas verticais $\{\mathrm{Re}\, z = \pm\frac{1}{2}\}$ e o semicírculo superior do círculo unitário.

Exercício 3.1.24. Revisite cada um dos exemplos de quocientes por ações de grupos discretos, que discutimos na Seção 3.1.4, e certifique-se de que a descrição que acabamos de dar para como os identificamos com quocientes por decomposições scs está correta.

Observação 3.1.25. Embora seja possível adaptar a discussão acima à descrição do quociente de S^3 pelo fluxo de Hopf, preferimos não fazê-lo aqui, pois não discutiremos esse tipo de quociente no que segue.

Uma vantagem clara de usarmos compactos com identificações no bordo é que, com frequência, isso nos permite uma melhor compreensão topológica do quociente. Por mais que estejamos acostumados a identificar os quocientes $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $[0,1]/(0 \sim 1)$, um pequeno esforço de nos distanciarmos desse costume é suficiente para notar que a segunda forma de pensar o quociente torna muito mais fácil perceber que se trata de um círculo topológico.

A desvantagem de considerar identificações em domínios fundamentais, por outro lado, também é fácil de observar nesse mesmo exemplo: ao escolhermos o intervalo $[0,1)$ como domínio fundamental e identificarmos os dois extremos de

[4] Conjuntos "fundamentais" são, às vezes, definidos como conjuntos compactos, mas preferimos aqui usar a definição que demos, compatível com a definição usual na teoria de sistemas dinâmicos.

$[0,1]$ para obter o quociente, estamos distinguindo esses extremos como pontos (aparentemente) especiais. Temos, então, que fazer um esforço adicional para nos convencermos de que não há nada especial sobre eles. Vemos isso observando, por exemplo, que poderíamos ter escolhido $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ como domínio fundamental para a ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ e, nesse caso, os pontos especiais seriam outros e a classe de 0 e 1, representada pelo ponto $1 \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, nada tem que a diferencie de todas as outras, exceto dos extremos $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$. Esse raciocínio mostra que, na verdade, tampouco há nada especial sobre $\frac{1}{2}$ ou sobre qualquer outro número em $[0,1)$. Essa "democracia" entre todas as classes de equivalência é, provavelmente, mais diretamente evidente no quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, que considera todas as classes de forma equânime: são todas da forma $\{x + n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Além disso, vemos também que o quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é *localmente igual* a $\mathbb{R}$ no seguinte sentido. Denote por $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a projeção, seja $x \in \mathbb{R}$ e tome $\varepsilon > 0$ pequeno (menor que $\frac{1}{2}$). A $\mathbb{Z}$-órbita do intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ consiste de uma coleção disjunta de transladados de $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, cada um dos quais é levado homeomorficamente à sua classe de equivalência $[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)]$ (ou, para ser pedantemente preciso, à sua imagem $p\big((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\big)$). Mais que isso, podemos declarar que a distância entre as classes de dois pontos em $[(x-\varepsilon, x+\varepsilon)]$ é a mesma que a distância entre os representantes dessas classes em $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, e essa definição não depende de qual intervalo na órbita de $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ escolhemos para fazê-lo. Isto é, se olhamos apenas para pequenas vizinhanças é impossível saber se estamos em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Embora simples, esse exemplo é paradigmático: veremos outras manifestações dos mesmos princípios a seguir.

Exercício 3.1.26. a) Desenvolva, para o 2-toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, uma discussão paralela à que acabamos de fazer para $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nesse caso, é importante refletir sobre dois tipos distintos de pontos do bordo do quadrado $[0,1]^2$: os quatro vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ e os demais pontos do bordo. Ao final, precisamos ter claro que não há, na verdade, nada especial sobre nenhum desses pontos, sendo impossível distinguir pequenas vizinhanças em $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de qualquer uma das componentes conexas de suas pré-imagens pela projeção $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

b) Faça o mesmo para o exemplo do quociente do octaedro (espaço lenticular) e o quociente $S^3/\{\pm 1, \pm \mathbf{i}\}$. Embora perfeitamente análogo, há que se tomar algum cuidado com o que consideramos "indistinguível" nesse caso. Isso depende, inclusive, de estarmos nos referindo à prórpia esfera S^3 ou à sua imagem por projeção estereográfica.

3.2 Variedades

Já mencionamos variedades várias vezes e já vimos uma grande variedade de exemplos de variedades. É chegada a hora de definirmos variedades formalmente.

3.2.1 Pseudogrupos e variedades

Uma *n-variedade* é um espaço topológico que é localmente "como" o $\mathbb{R}^n$. O que queremos dizer com "como" depende de qual ou quais entre as muitas "qualidades" de $\mathbb{R}^n$ queremos que nossa variedade tenha. Tais qualidades são definidas operacionalmente, em termos de um *pseudogrupo*.

Definição 3.2.1 (Pseudogrupo)**.** Seja X um espaço topológico. Uma coleção $\mathcal{G}$ de homeomorfismos entre conjuntos abertos de X é um *pseudogrupo* se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Os domínios dos elementos de $\mathcal{G}$ cobrem todo o espaço X.

(ii) $\mathcal{G}$ é fechado por inversas: se $(g : U \to V) \in \mathcal{G}$, então $(g^{-1} : V \to U) \in \mathcal{G}$.

(iii) $\mathcal{G}$ é fechado por restrição de domínio, isto é, se $(g : U \to V) \in \mathcal{G}$ e $U' \subset U$, então $\left(g|_{U'} \colon U' \to g\,(U')\right) \in \mathcal{G}$.

(iv) $\mathcal{G}$ é fechado por composições no sentido de que se a composição $g_2 \circ g_1$ está definida (possivelmente em apenas parte do domínio de g_1), então ela pertence a $\mathcal{G}$.

(v) Pertencer a $\mathcal{G}$ é uma propriedade *local*, isto é, se $g \colon U \to V$ é um homeomorfismo entre abertos de X e se U pode ser coberto por uma união de abertos U_α de forma que cada $g|_{U_\alpha} \in \mathcal{G}$, então $g \in \mathcal{G}$.

Segue das condições acima que a identidade em qualquer aberto de X é sempre um elemento de qualquer pseudogrupo.

Exercício 3.2.2. Verifique essa afirmação. Quais entre as propriedades de pseudogrupos têm que ser usadas aqui?

Há, portanto, dois pseudogrupos óbvios. O menor de todos os pseudogrupos é o que contém apenas a identidade (e a identidade restrita a qualquer aberto de X), enquanto o maior de todos os pseudogrupos é aquele que contém todos os homeomorfismos entre quaisquer dois abertos de X. Supondo que o espaço que

estamos considerando é o $\mathbb{R}^n$, entre os dois extremos anteriores podemos mencionar o pseudogrupo de difeomorfismos locais de $\mathbb{R}^n$.

Pseudogrupos são usados para nos permitir colar abertos de $\mathbb{R}^n$ para formar uma n-variedade que herda o sabor do pseudogrupo. Para tornar claro o que essa frase quer dizer, precisamos de algumas definições, que combinamos em um mesmo pacote.

Definição 3.2.3 (Cartas coordenadas, $\mathcal{G}$-atlas, $\mathcal{G}$-variedade)**.** Seja $\mathcal{G}$ um pseudogrupo em $\mathbb{R}^n$. Uma *$\mathcal{G}$-variedade n-dimensional* é um par formado por um espaço topológico Hausdorff M, com base enumerável para a topologia, e um *$\mathcal{G}$-atlas*.[5] Um $\mathcal{G}$-atlas em M é um conjunto *$\mathcal{G}$-compatível* de *cartas coordenadas* cujos domínios cobrem todo M. Uma carta coordenada é um par (φ, U) onde $U \subset M$ é um aberto e $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre sua imagem. Duas cartas coordenadas $(\varphi, U), (\psi, V)$ são $\mathcal{G}$-compatíveis se a *troca de coordenadas*, isto é, a composição

$$\varphi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V) \tag{3.2.1}$$

é um elemento de $\mathcal{G}$. Finalmente, uma coleção de cartas coordenadas é $\mathcal{G}$-compatível se quaisquer duas entre suas cartas são $\mathcal{G}$-compatíveis.

Nessa definição, fica subentendido que, se a interseção $U \cap V$ é vazia, então a troca de coordenadas (3.2.1) pertence a $\mathcal{G}$ por vacuidade. Cartas coordenadas também são chamadas de *cartas locais*.

Uma forma útil de entender a Definição 3.2.3 é a seguinte. Pensamos no pseudogrupo como uma forma de especificar uma "qualidade" do $\mathbb{R}^n$, algo como uma estampa em um tecido. Pertencer ao pseudogrupo significa preservar essa estampa. Por exemplo, podemos tomar como estampa a propriedade de ser diferenciável. As cartas coordenadas permitem-nos, então, transferir a estampa para M de forma coerente, já que, se um ponto pertence ao domínio de duas (ou mais) cartas coordenadas, como a troca de coordenadas preserva a estampa, tanto faz qual das duas (ou muitas) cartas coordenadas é usada para obter a estampa numa vizinhança do ponto: todas produzem o mesmo resultado. Continuando com o exemplo de diferenciabilidade (veremos outros já, já), seja $\mathcal{G}$ o pseudogrupo de difeomorfismos locais e M uma $\mathcal{G}$-variedade chamada, nesse caso, de *variedade diferenciável* ou *variedade suave*. Em uma variedade diferenciável M, podemos *definir* a diferenciabilidade de uma função $f\colon M \to \mathbb{R}$ no ponto $p \in M$, tomando uma carta

[5] Uma coleção $\mathcal{B}$ de abertos em um espaço topológico é uma *base* para a topologia se todo aberto puder ser escrito como união de conjuntos em $\mathcal{B}$. Espaços topológicos que não possuem base enumerável, embora interessantes, não serão considerados aqui.

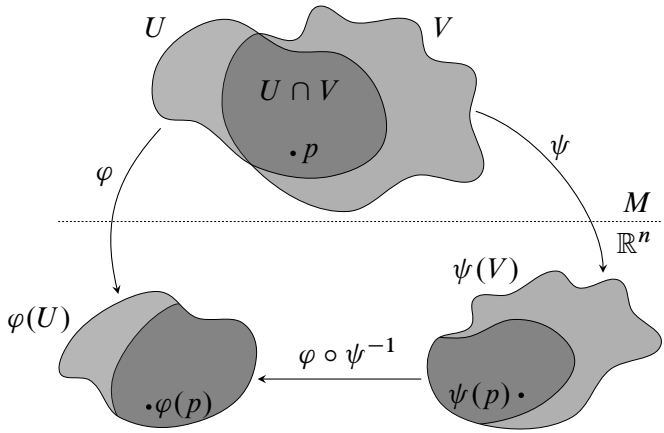


Figura 3.2.1: Na parte de cima da figura, está a $\mathcal{G}$-variedade n-dimensional M onde estão desenhados dois abertos $U, V \subset M$ cuja interseção é não vazia. Na parte de baixo, está $\mathbb{R}^n$, que contêm as imagens de U pela carta coordenada $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ e de V pela carta coordenada $\psi\colon V \to \mathbb{R}^n$. A troca de coordenadas $\varphi \circ \psi^{-1}$ é um homeomorfismo entre dois abertos de $\mathbb{R}^n$ pertencente ao pseudogrupo $\mathcal{G}$.

coordenada (φ, U) tal que $p \in U$ e declarando que f é diferenciável em p se $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$. Essa definição não depende de termos tomado a carta (φ, U). Se (ψ, V) é outra carta coordenada com $p \in V$, então $f \circ \psi^{-1}$ é diferenciável em $\psi(p)$ se e somente se $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$. Isso porque (veja a figura Figura 3.2.1), em $\psi(U \cap V)$,

$$f \circ \psi^{-1} = \left(f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)$$

e, como por hipótese a troca de coordenadas $\varphi \circ \psi^{-1}$ está em $\mathcal{G}$ sendo, portanto, um difeomorfismo definido em uma vizinhança de $\psi(p)$, segue que $f \circ \psi^{-1}$ é diferenciável em $\psi(p)$ se e somente se $f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(p)) = \varphi(p)$.

Exercício 3.2.4. Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $f\colon M \to N$ uma transformação contínua. Como devemos definir a *diferenciabilidade* de f? Certifique-se que sua definição não depende de "escolhas".

Voltemos ao exemplo do círculo e encontremos agora um atlas para o quociente $M = [0,1]/(0 \sim 1)$. Nesse exemplo simples, vamos percorrer o caminho

na direção oposta: vamos cobrir M por abertos, definir cartas coordenadas "naturais" nesses abertos, observar quais estampas as trocas de coordenadas preservam, isto é, quais pseudogrupos contêm essas trocas de coordenadas, e escolher uma (ou várias) estampa(s) que gostaríamos de transportar para M. Tomamos os dois abertos $U = (0,1)$ e $V = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Para evitar sobrecarregá-la, estamos sendo pouco rigorosos com a notação: V é, na verdade, a projeção para M da união dos dois intervalos acima. Definimos $\varphi : U \to \mathbb{R}$ por $\varphi(x) = x$ e definimos $\psi : V \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ x+1, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Exercício 3.2.5. Verifique que ψ é um homeomorfismo sobre sua imagem como requer a definição de uma carta coordenada.

Assim, a interseção $U \cap V = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e as trocas de coordenadas são

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ x-1, & \text{se } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

e

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ x+1, & \text{se } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Agora podemos escolher qual pseudogrupo queremos usar, ou qual estampa queremos considerar em M. Essas trocas de coordenadas têm várias qualidades, entre as quais podemos listar: são homeomorfismos, difeomorfismos, transformações afins, transformações que preservam a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, isometrias[6], entre outras. Esse exemplo também evidencia a necessidade de se incluir o Item v na definição de pseudogrupos. Ao considerar as isometrias de $\mathbb{R}$, por exemplo, poderíamos pensar que, para criar um pseudogrupo, bastaria considerar todas as restrições de isometrias a abertos de $\mathbb{R}$, mas esse não é o caso, como se vê nesse exemplo: precisamos também incluir entre os elementos do pseudogrupo transformações que são restrições de *isometrias diferentes* em diferentes componentes conexas de um aberto. O exercício a seguir esclarece essa questão para pseudogrupos em geral.

[6]Uma *isometria* entre dois espaços métricos $(X, d_X), (Y, d_Y)$ e uma transformação $f : X \to Y$ que preserva distâncias, isto é, tal que $d_Y\left(f(x), f(x')\right) = d_X(x, x')$.

Exercícios 3.2.6. a) Mostre que a propriedade de ser um pseudogrupo é fechada por interseções, isto é, se $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são ambos pseudogrupos definidos no mesmo espaço X, então sua interseção $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ também é um pseudogrupo em X.

b) Conclua que qualquer coleção de homeomorfismos entre pares de abertos de X *gera* um pseudogrupo em X que é, por definição, o "menor" pseudogrupo que a contém. *Dica:* Você vai precisar do Lema de Zorn aqui.

Com esse exercício em mente, passaremos a ser bastante relaxados ao falarmos de pseudogrupos: especificaremos uma coleção (um tipo) de homeomorfismos locais e deixaremos o exercício fazer sua mágica e criar o pseudogrupo que a contém.

Antes de vermos outros exemplos, voltemos às esferas que tanto nos têm ocupado e vejamos que elas são variedades. Há várias formas de fazê-lo, mas uma delas é a mais imediata nessas notas: usaremos projeção estereográfica. Consideremos então $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde, como de costume, usamos as coordenadas $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Precisamos cobrir S^n por cartas coordenadas e o fazemos da seguinte forma. Usando a notação $N = (\mathbf{0}, 1)$ e $S = (\mathbf{0}, -1)$, definimos $U_S = S^n \setminus \{N\}$ e $U_N = S^n \setminus \{S\}$ e definimos

$$g_S \colon U_S \to \mathbb{R}^n, \quad g_S(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{1-t} \cdot \mathbf{x}$$

e

$$g_N \colon U_N \to \mathbb{R}^n, \quad g_N(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{1+t} \cdot \mathbf{x}$$

isto é, g_S e g_N são as projeções estereográficas de S^n em $\mathbb{R}^n$ a partir dos polos norte e sul, respectivamente. As inversas são (veja Exercícios 1.3.11 e Exercícios 1.4.7)

$$g_S^{-1}(\mathbf{w}) = \left(\frac{2\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1}, \frac{\|\mathbf{w}\|^2 - 1}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1} \right), \; g_N^{-1}(\mathbf{w}) = \left(\frac{2\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1}, \frac{-\|\mathbf{w}\|^2 + 1}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1} \right)$$

e as trocas de coordenadas, ambas definidas em $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, têm ambas a mesma fórmula:

$$g_N \circ g_S^{-1}(\mathbf{z}) = g_S \circ g_N^{-1}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|^2},$$

isto é, essas trocas de coordenadas são, ambas, a inversão na esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Assim construímos um atlas em S^n e, como no exemplo anterior, podemos escolher qual de seus sabores gostaríamos de exaltar: apenas o topológico, o diferenciável, o analítico real, o conforme etc.

No caso em que $n = 2$, podemos identificar $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ e obtemos duas cartas coordenadas cujas trocas de coordenadas são, ambas, a função

$$z \mapsto \frac{1}{\overline{z}},$$

a inversão no círculo unitário. Por mais interessante e agradável que seja essa função, ela tem o defeito de não ser holomorfa. Para corrigir esse problema, modificamos uma das cartas coordenadas:

$$g_N(z,t) = \frac{z}{1-t} \quad \text{e} \quad \bar{g}_S(z,t) = \frac{\overline{z}}{1+t}$$

com os mesmos domínios de antes. Com essa modificação, ambas as trocas de coordenadas se tornam

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

que é uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Isto é, encontramos um atlas holomorfo para S^2, que justifica o nome usual da compactificação por um ponto $\widehat{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}$ ser *esfera de Riemann*. É interessante observar que o pseudogrupo gerado pelas transformações $z \mapsto z$ (a identidade) e $z \mapsto \frac{1}{z}$ não é todo o pseudogrupo de difeomorfismos biholomorfos (isto é, difeomorfismos holomorfos com inversas holomorfas) entre abertos de $\mathbb{C}$.

Exercício 3.2.7. Descreva todos os elementos do pseudogrupo em $\mathbb{C}$ gerado pela identidade, $z \mapsto z$, e $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Dois $\mathcal{G}$-atlas em uma mesma $\mathcal{G}$-variedade são *$\mathcal{G}$-compatíveis* se sua união também é um $\mathcal{G}$-atlas. Compatibilidade entre $\mathcal{G}$-atlas é uma relação de equivalência (graças ao Item v na Definição 3.2.1; verifique) e uma classe de equivalência (por compatibilidade) de $\mathcal{G}$-atlas em uma $\mathcal{G}$-variedade M é uma *$\mathcal{G}$-estrutura* em M. Como acontece com frequência com classes de equivalência, a maioria das vezes que consideramos uma $\mathcal{G}$-estrutura em uma variedade, o fazemos apresentando um $\mathcal{G}$-atlas específico, como nos exemplos acima. No entanto, é às vezes útil lembrar que a escolha de um $\mathcal{G}$-atlas é apenas uma entre muitas possíveis.

Exercícios 3.2.8. a) Encontre estruturas diferenciáveis no toro quadrado T_Q e em um toro de revolução T_R.

b) Um homeomorfismo $f : T_Q \to T_R$ é um *difeomorfismo* se o é em cartas coordenadas, isto é, se, dadas (φ, U), uma carta coordenada de um atlas diferenciável em T_Q, e (ψ, V), uma carta coordenada de um atlas diferenciável em T_R,

então

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big) \to \psi\big(f(U) \cap V\big)$$

é um difeomorfismo e, além disso, essa afirmação vale para toda escolha de cartas coordenadas das estruturas diferenciáveis em T_Q e T_R. Note que os conjuntos $\varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right)$ e $\psi\left(f(U) \cap V\right)$ são abertos em $\mathbb{R}^2$ e, portanto, sabemos o que é dizer que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é um difeomorfismo. Encontre um difeomorfismo entre T_Q e T_R.

c) O atlas coordenado que o leitor usou para definir a estrutura diferenciável em T_Q era apenas diferenciável, isto é, suas trocas de coordenadas não teriam propriedades mais específicas, como, por exemplo, serem isometrias de $\mathbb{R}^2$? Nesse caso, o que seria preciso para podermos, primeiro definir, e, em seguida, nos perguntar se um homeomorfismo f como acima é uma isometria? *Aviso:* Essa última pergunta é mais "ampla", por assim dizer, e, para respondê-la, temos que visitar lugares interessantes, alguns dos quais visitaremos a seguir. Aqui ela é feita com o intuito de provocar reflexão, mas não necessariamente produzir uma resposta completa.

3.2.2 Folheações

Vejamos agora um exemplo de pseudogrupo que melhor se aplica à comparação com uma estampa. Em $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ com coordenadas $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, considere os difeomorfismos locais da forma

$$f(\mathbf{x}, t) = (f_1(\mathbf{x}, t), f_2(t)) \tag{3.2.2}$$

onde f_1 toma valores em $\mathbb{R}^n$ e f_2 é uma função de uma variável real tomando valores reais. A derivada de difeomorfismos desse tipo é da forma

$$Df(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) & \frac{\partial f_1}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{0} & f_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Reciprocamente, podemos especificar essa coleção de difeomorfismos locais como aqueles cuja matriz jacobiana tem zeros em toda a sua última linha, com exceção apenas da última entrada (na diagonal).

Exercício 3.2.9. Prove a afirmação acima e conclua que todos os elementos do pseudogrupo gerado pela coleção de difeomorfismos locais da forma (3.2.2) têm essa mesma forma.

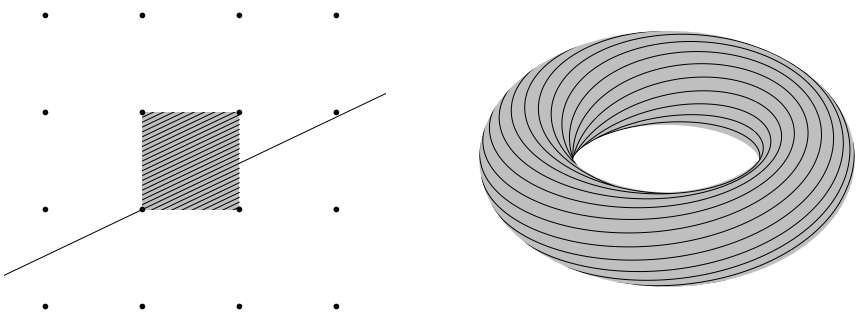


Figura 3.2.2: Folheação do toro $T_Q = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induzida pelas retas $y = mx + b$ para $m = \frac{10}{21}$.

Seja $\mathcal{G}$ o pseudogrupo gerado por difeomorfismos locais da forma (3.2.2). Uma $\mathcal{G}$-estrutura é chamada uma *folheação* (de codimensão 1). Um $\mathcal{G}$-atlas é chamado um *atlas folheado* e as cartas coordenadas de um atlas folheado são *cartas folheadas*. Se $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é uma carta folheada, os conjuntos (não vazios) da forma $\varphi^{-1}(\{t = t_0\})$, onde $t_0 \in \mathbb{R}$, são as *placas* da carta folheada (φ, U), ou as *φ-placas*. Como todo atlas folheado é, em particular, um atlas diferenciável, uma $\mathcal{G}$-variedade é, em particular, uma variedade diferenciável. Assim, é frequente nos referirmos a um $\mathcal{G}$-atlas em M como *uma folheação em M*, isto é, fazemos uma distinção entre a variedade diferenciável M e uma folheação nela, e nos referimos a M como uma *variedade folheada*.

A característica distintiva de atlas folheados é que as placas de cartas coordenadas diferentes se intersectam "coerentemente", de modo que suas uniões formam as *folhas* da folheação, isto é, subvariedades (imersas) de dimensão n dentro da $\mathcal{G}$-variedade M.

Exercícios 3.2.10. a) Seja M uma $(n+1)$-variedade folheada e sejam (φ, U) e (ψ, V) duas cartas folheadas em M. Mostre que cada componente conexa da interseção de uma placa de (φ, U) com V está contida em uma placa de (ψ, V).

b) Dados $p, q \in M$, defina $p \sim q$ se, para $i = 0, \ldots, n$, existem coleções de pontos $p_i \in M$ e de cartas folheadas (φ_i, U_i), tais que $p = p_0$, para $i = 0, \ldots, n-1$, $p_i, p_{i+1} \in U_i$ e pertencem à mesma φ_i-placa, e $p_n, q \in U_n$ e pertencem à mesma φ_n-placa. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência e que cada classe de equivalência de $\sim$ possui uma estrutura de n-variedade diferenciável. Essas classes de equivalência são chamadas *folhas* da folheação em M.

c) Fixe $m \in \mathbb{R}$ e considere, em $\mathbb{R}^2$, o conjunto L_m de todas as retas com inclinação m, isto é, retas da forma $y = mx + b$, para $b \in \mathbb{R}$. Encontre um atlas folheado no toro $T_Q = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ cujas folhas são as projeções das retas de L_m para T_Q, como visualizado na Figura 3.2.2. Como o tipo topológico das folhas em T_Q depende de m? Explique em detalhe.

Mencionamos, para terminar, que é possível seguir um roteiro análogo ao que seguimos acima para definir folheações de qualquer codimensão. Não entraremos em detalhes aqui além de mencionar que a fibração de Hopf é uma folheação de codimensão 2 em S^3.

3.2.3 Outros exemplos curiosos

Esta seção contém alguns exemplos pouco usuais e contraintuitivos. Talvez seu principal objetivo seja redirecionar nossa intuição e recolocá-la no bom caminho, seja indicando direções menos comuns, mas que merecem nossa consideração, como é o caso de toros afins, seja explicitando dificuldades com a palavra "suave". Quando pensamos em variedades suaves, no sentido técnico da palavra "suave", nosso hábito de vida tridimensional, aliado à nossa limitação linguística, nos induz a imaginar uma superfície suave no sentido usual da palavra suave, isto é, sem cantos ou vértices pontiagudos. O que parece suave aos nossos olhos, no entanto, é, por vezes, bastante diferente de suavidade no sentido técnico. Como consequência inadvertida de nossos esforços para esclarecer e superar essas dificuldades, poderemos concluir mostrando que toda superfície fechada (compacta e sem bordo) e orientável tem uma estrutura holomorfa, isto é, de *superfície de Riemann*. Na verdade, com exceção da esfera, superfícies sempre têm muitas dessas estruturas: há até mesmo *um espaço* que parametriza tais estruturas, chamado *espaço de Teichmüller*, mas não discutiremos isso aqui.

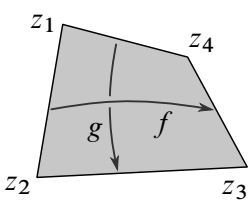


Figura 3.2.3: Um quadrilátero em $\mathbb{C}$. As setas indicam transformações afins complexas que realizam as identificações dos dois pares de lados para produzir, no quociente, um toro afim complexo.

Seja $R \subset \mathbb{C}$ um quadrilátero qualquer. Sabemos, de geometria plana elementar, que a soma dos ângulos internos nos quatro vértices de R é 2π e isso nos permite pôr em R uma estrutura *afim*, isto é, a estrutura determinada pelo pseudogrupo gerado por transformações do tipo $z \mapsto az + b$, onde $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

Exercício 3.2.11. a) Sejam z_1, z_2, z_3 e z_4 os quatro vértices de R, listados em ordem circular em ∂R. Encontre coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, em termos dos

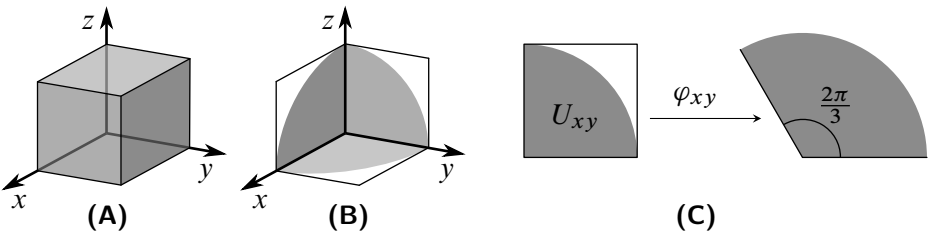


Figura 3.2.4: (A): A superfície S é o bordo do cubo unitário em $\mathbb{R}^3$. Introduzimos em S uma estrutura holomorfa, isto é, tornamos S uma superfície de Riemann. **(B):** A origem $\mathbf{0}$ não parece um ponto onde S é "suave", mas suavidade no sentido técnico da palavra é ..., bem, algo que deve ser entendido no sentido técnico. Assim, tomamos a vizinhança da $\mathbf{0}$ consistindo de três quartos de discos como mostrado nessa parte da figura e nela definimos uma carta coordenada. **(C):** Cada quarto de disco, como, por exemplo, U_{xy} contido no plano horizontal, é levado a um terço de disco por uma transformação $\varphi_{xy}: U_{xy} \to \mathbb{C}$, holomorfa em todos os pontos de U_{xy} exceto em $\mathbf{0}$. Note a aparente desonestidade que cometemos ao dizer isso já que U_{xy}, pensado como subconjunto de S, é um subconjunto de uma superfície "abstrata" em que não faz sentido falar de nada além da topologia. Porém U_{xy} também é subconjunto de um plano euclidiano e, como tal, pode ser considerado um subconjunto de $\mathbb{C}$ e, portanto, no qual faz sentido falar de funções holomorfas.

vértices de R, de modo que $f(z) = az + b$ leve z_1, z_2 em z_4, z_3, respectivamente, e $g(z) = cz + d$ leve z_1, z_4 em z_2, z_3, respectivamente – veja a Figura 3.2.3.

b) Seja $T = R/\sim$ o quociente pela menor equivalência que identifica $z, w \in \partial R$ se $w = f(z)$ ou $w = g(z)$. Use f, g para introduzir um atlas de cartas coordenadas em T cujas trocas de coordenadas estão no pseudogrupo gerado pelas transformações afins de $\mathbb{C}$. É provável que você vá precisar de pelo menos quatro cartas coordenadas: uma para o interior de R, uma para cada par de arestas identificadas e uma para os vértices.

Considere agora o cubo unitário $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ e seja $S = \partial[0,1]^3$ seu bordo, uma superfície em $\mathbb{R}^3$, como mostra a imagem (A) da Figura 3.2.4. Como subconjunto de $\mathbb{R}^3$, S herda uma (boa) topologia, mas não parece muito suave. Apesar das aparências, vamos introduzir em S uma estrutura diferenciável. Aliás, melhor que diferenciável, vamos construir em S um atlas holomorfo, isto é, cujas trocas de coordenadas pertencem ao pseudogrupo gerado pelos difeomorfismos locais holomorfos em $\mathbb{C}$. Como já mencionamos, superfícies com estruturas holomor-

fas são chamadas superfícies de Riemann e têm papel importante em várias áreas da matemática. A origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ é um "vértice" de S e, como tal, parece um dos pontos onde seria menos plausível encontrarmos uma carta coordenada com chance de satisfazer nossa ambição holomorfa. Tomemos a vizinhança U de $\mathbf{0}$ composta pela união dos três quartos de discos unitários abertos contidos nos quadrantes positivos dos planos coordenados xy, yz e zx, como mostra a imagem (B) da Figura 3.2.4. Denotemo-os por U_{xy}, U_{yz} e U_{zx}, respectivamente, de modo que $U = U_{xy} \cup U_{yz} \cup U_{zx}$. Em U_{xy} introduzimos a coordenada complexa $\zeta = x + iy$ e definimos

$$\varphi_{xy} \colon U_{xy} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_{xy}(\zeta) = \zeta^{\frac{4}{3}} := |\zeta|^{\frac{4}{3}} e^{i\frac{4\theta}{3}}$$

onde $\theta \in [0, 2\pi]$, isto é, escolhemos a componente angular $\theta \in [0, 2\pi)$ (chamada *argumento* de ζ) para representar o número complexo $\zeta = x + iy$ na forma polar $\zeta = |\zeta| e^{i\theta}$, medida a partir do semieixo $x > 0$. Isso permite definir a potência racional $\zeta^{\frac{4}{3}}$ pela fórmula acima (parte (C) da Figura 3.2.4). Analogamente, em U_{yz} introduzimos a coordenada complexa $\xi = y + iz$ e definimos

$$\varphi_{yz} \colon U_{yz} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_{yz}(\xi) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \xi^{\frac{4}{3}}$$

e em U_{zx} introduzimos a coordenada complexa $\eta = z + ix$ (!) e definimos

$$\varphi_{zx} \colon U_{zx} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_{zx}(\zeta) = e^{\frac{4\pi i}{3}} \eta^{\frac{4}{3}}$$

onde as potências fracionárias são definidas como acima, tomando os argumentos dos números complexos ξ, η no intervalo $[0, 2\pi)$, medidos a partir do semieixos $y > 0$ e $z > 0$, respectivamente. Por fim, definimos $\varphi \colon U \to \mathbb{C}$ fazendo $\varphi = \varphi_{xy}$ em U_{xy}, $\varphi = \varphi_{yz}$ em U_{yz} e $\varphi = \varphi_{zx}$ em U_{zx}.

Exercício 3.2.12. Verifique que a transformação φ está bem definida e é um homeomorfismo de U sobre o disco unitário aberto $\{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$. Encontre outras cartas de forma a cobrir todos os pontos de S e de forma que as trocas de coordenadas pertençam ao pseudogrupo gerado por difeomorfismos locais biholomorfos em $\mathbb{C}$.

Tendo chegado até aqui, podemos ir um pouco adiante e concluir que toda superfície compacta orientável possui uma estrutura holomorfa, isto é, uma estrutura de superfície de Riemann. Para fazê-lo, temos que usar um teorema que pode ser encontrado em Massey 1991; Munkres 2000, por exemplo, que afirma que toda

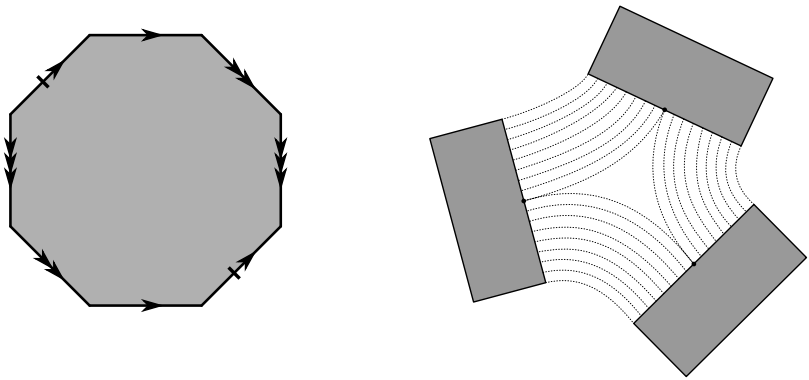


Figura 3.2.5: Esquerda: Um octágono com lados opostos identificados. O quociente é a soma conexa de dois toros, como mostrado à direita na Figura 3.1.3. **Direita:** Três retângulos com arestas identificadas. Com exceção do ponto central, todos os outros pontos do quociente têm vizinhanças *isométricas* a pequenos discos em $\mathbb{R}^2$. O ponto central, ao contrário, embora tenha uma vizinhança *homeomorfa* a um disco em $\mathbb{R}^2$, é um *ponto cônico* de ângulo 3π.

superfície compacta orientável, que não é a esfera, pode ser obtida pela identificação de arestas opostas de um polígono regular com $4g$ lados, como mostra a imagem esquerda da Figura 3.2.5. O número natural $g \geqslant 1$ é chamado o *gênero* da superfície quociente, denotada S_g.[7] O esquema de identificações mostrado na figura faz com que todos os vértices do polígono sejam identificados uns aos outros. Colando pequenas "vizinhanças setoriais" dos 4g vértices, como fizemos no exemplo do cubo, produz um ponto com "ângulo cônico" $2\pi(2g-1)$ radianos em seu entorno, algo que é possível fazer com papel e tesoura, mas não é muito simples, a menos que $g = 1$, que é o caso do toro. Para fazer com que todo esse ângulo se acomode ao redor de um ponto no plano, onde há apenas 2π radianos ao redor de cada ponto, precisamos usar uma potência fracionária, como também fizemos com o cubo, onde não havia excesso, mas falta de ângulo (para ser específico, devemos usar a potência $\frac{1}{2g-1}$).

Para formalizar o conceito de ponto cônico mencionado acima, introduzimos o conceito de *cone* em um espaço topológico, comum em topologia, e o conceito de *cone métrico*, provavelmente menos conhecido, mas também muito natural e muito útil. Dado um espaço topológico X, o *cone em* X é

$$C(X) := ([0,1] \times X)\,/\mathcal{G}$$

[7] A esfera, por definição, tem gênero 0.

onde $\mathcal{G}$ é a decomposição cujo único elemento não trivial é o conjunto $\{0\} \times X$, chamado *ápice* do cone. Se X é um espaço métrico, podemos tornar $C(X)$ em um espaço métrico, o *cone métrico* em X, definindo uma distância em $C(X)$ da seguinte maneira. Com exceção do ápice, cada ponto de $C(X)$ é representado unicamente por um par (t, x), onde $t \in (0, 1]$ e $x \in X$. Se d_X denota a distância em X, definimos

$$d_{C(X)}((t,x),(s,y)) := \begin{cases} \sqrt{t^2 + s^2 - 2st\cos d_X(x,y)}, & \text{se } d_X(x,y) \leqslant \pi \\ t + s, & \text{se } d_X(x,y) \geqslant \pi. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Exercícios 3.2.13. a) Verifique que a fórmula (3.2.3) funciona perfeitamente bem se $t = 0$ ou $s = 0$.

b) Construa um modelo de papel de um ponto com ângulo cônico 3π em seu entorno, usando três folhas de papel e colando os pontos médios de três de seus lados como mostra a parte direita da Figura 3.2.5. Não é possível arranjar o ponto no plano com todo esse ângulo ao seu redor sem amassar todo o papel, mas é possível fazer as colagens perfeitamente bem dobrando as folhas ao meio. Com esse modelo físico em mãos, entenda por que a definição (3.2.3) é a "definição certa" de distância em $C(X)$.

c) Tendo tido essa experiência sensorial, complete agora a descrição acima e introduza um atlas holomorfo em S_g.

d) Construa uma isometria entre uma vizinhança do ponto central da colagem à direita na Figura 3.2.5 e uma vizinhança do ápice do cone métrico no círculo plano de raio $\frac{3}{2}$. *Sugestão:* Pense antes sobre qual métrica deve ser usada no círculo.

3.2.4 O fibrado tangente

Nesta seção, todas as variedades serão infinitamente diferenciáveis e as palavras "diferenciável" e "suave" serão sempre usadas como sinônimos de "infinitamente diferenciável". Há algumas peculiaridades quando permitimos diferenciabilidades mais baixas com as quais preferimos evitar contato. Como o leitor provavelmente observou, a definição de variedade que demos na Seção 3.2.1 não requer que M seja subconjunto de um espaço maior como, por exemplo, o $\mathbb{R}^n$. Essa é a forma "correta" e elegante de se definir variedades, mas, como acontece com frequência

em matemática, elegância tem seu preço. Definimos variedades diferenciáveis para sermos capazes de falar de funções diferenciáveis nelas definidas. No entanto, agora nos encontramos na seguinte situação embaraçosa: sabemos quando uma função $f : M \to \mathbb{R}$, definida na variedade diferenciável M, é diferenciável, mas não sabemos o que é sua derivada.

Por culpa de Newton e Leibniz, estudantes de matemática e de várias outras áreas da ciência são obrigados a gastar anos na faculdade aprendendo a derivar e integrar. Após adquirir alguma maturidade no assunto, aprendemos que derivadas em dimensão qualquer, mas especialmente em dimensões maiores que 1, devem ser entendidas como transformações lineares entre, claro, espaços vetoriais. Esta seção é dedicada a construir os espaços vetoriais que estão faltando e nos quais poderemos definir a derivada de uma função diferenciável entre variedades suaves. A estratégia que adotaremos será, como também acontece com frequência em matemática, descer do salto alto, lidar com o problema dentro de $\mathbb{R}^N$ e depois voltar ao salto alto, argumentando que 1) é sempre possível nos colocarmos dentro de algum $\mathbb{R}^N$ e 2) o que fizemos dentro de um $\mathbb{R}^N$ é "isomorfo" ao que faríamos dentro de qualquer outro, de modo que podemos tomar a "classe de equivalência" por esse isomorfismo como um objeto independente. Prevenimos a leitora que, ao descer do salto, teremos que sujar as mãos com notação e que, no presente caso, acabamos com as mãos – e os olhos e a cabeça – bastante enlameados. Mas o resultado final, além de importantíssimo, acaba se tornando, com tempo, parte de nós como matemáticos. Mãos à lama, então.

Dada uma transformação diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sua *matriz jacobiana* em um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

é a representação matricial, em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, da transformação linear $Df_{\mathbf{x}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a *derivada de f no ponto* $\mathbf{x}$. A derivada $Df_{\mathbf{x}}$, depende, claro, do ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ onde é calculada e, para organizar a informação contida na derivada Df avaliada em *todos* os pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, podemos fazer o seguinte. A cada ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, associamos uma "cópia" de $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$, a cada ponto $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ associamos uma cópia de $\mathbb{R}^m$, denotada por $\mathbb{R}^m_{\mathbf{y}}$, e declaramos que $Df_{\mathbf{x}}$ é uma transformação linear entre essas cópias, isto é,

$$Df_{\mathbf{x}} \colon \mathbb{R}^n_{\mathbf{x}} \to \mathbb{R}^m_{f(\mathbf{x})}.$$

Mas associar a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ uma cópia $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$ de $\mathbb{R}^n$ é o mesmo que tomar o produto cartesiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e declarar que $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}} := \mathrm{pr}_1^{-1}(\mathbf{x})$, onde $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é

a projeção na primeira coordenada, isto é, $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$ é a *fibra*, sobre o ponto $\mathbf{x}$, da projeção pr_1. Tendo usado a palavra "fibra" e pensando no futuro próximo, quando definiremos fibrados tangentes de variedades diferenciáveis em geral, vamos definir o *fibrado tangente* $T\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ como o produto cartesiano

$$T\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

onde a primeira cópia de $\mathbb{R}^n$ é o domínio de funções que vamos diferenciar, enquanto a segunda cópia corresponde ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$, o domínio da derivada pontual, para cada $\mathbf{x}$. Com essa notação, uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ induz uma transformação $f_* \colon T\mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^m$ entre fibrados tangentes, definida por

$$f_*(\mathbf{x}, \mathbf{v}) := \big(f(\mathbf{x}), Df_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})\big).$$

Tomemos agora uma variedade diferenciável "dentro" de algum $\mathbb{R}^N$ como, por exemplo, um círculo em $\mathbb{R}^2$, a n-esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$ ou um 2-toro de revolução em $\mathbb{R}^3$. O leitor poderia perguntar aqui sobre o bordo S do cubo unitário, no qual pusemos uma estrutura holomorfa na Seção 3.2.3: S é, obviamente, um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e, como superfície de Riemann, é uma variedade diferenciável. Mas não vamos incluir a superfície S na discussão que segue e é útil explicar qual critério usamos para excluí-la, já que isso também ajuda a entender a estranheza causada por aquele exemplo. Dados dois conjuntos A, B, com $A \subset B$, a *inclusão* $\iota \colon A \hookrightarrow B$ é definida da maneira óbvia: $\iota(a) = a$, para todo $a \in A$. Se M é uma variedade diferenciável e $M \subset \mathbb{R}^N$, para algum $N \in \mathbb{N}$, podemos nos perguntar se a inclusão $\iota \colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ é uma transformação diferenciável pela definição do Exercício 3.2.4. Se sim, dizemos que M é *suavemente mergulhada* em $\mathbb{R}^N$. Quando falamos acima de variedades "dentro" de $\mathbb{R}^N$ era esse o significado técnico da palavra "dentro" que queríamos usar.

Exercício 3.2.14. Mostre que a inclusão $\iota \colon S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ do bordo S do cubo unitário com a estrutura diferenciável introduzida na Seção 3.2.3 em $\mathbb{R}^3$ não é diferenciável, no sentido de que há um conjunto não vazio de pontos de S onde ι não é diferenciável. Descreva esse conjunto.

Será útil tornar essa definição pouco mais geral da seguinte maneira. Suponhamos que M é uma n-variedade suave e que $f : M \to \mathbb{R}^N$ é uma transformação diferenciável. Dado $p \in M$, podemos definir o *posto* de f em p como o posto da transformação linear

$$D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \colon \mathbb{R}^n_{\varphi(p)} \to \mathbb{R}^N_{f(p)}$$

onde (U, φ) é uma carta coordenada da estrutura diferenciável de M com $U \ni p$.

Exercício 3.2.15. Mostre que essa é uma boa definição, isto é, ela não depende da escolha da carta coordenada contendo o ponto p.

Dizemos que $f: M \to \mathbb{R}^N$ é um *mergulho diferenciável,* ou *mergulho suave*, se f é uma transformação diferenciável que é um homeomorfismo sobre sua imagem e que tem posto máximo, isto é, igual à dimensão n de M, em todo ponto $p \in M$.

Voltemos agora ao que começamos a dizer acima. Seja M uma n-variedade diferenciável, suavemente mergulhada em $\mathbb{R}^N$ ou, o que dá no mesmo, $M \subset \mathbb{R}^N$ e a inclusão $\iota: M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ seja diferenciável. Seja (φ, U) uma carta coordenada da estrutura suave em M. A transformação $\iota \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}^N$ é diferenciável e, portanto, induz uma transformação

$$\left(\iota \circ \varphi^{-1}\right)_* : T\varphi(U) \to T\mathbb{R}^N.$$

Aqui estamos usando a definição (natural) $TA := A \times \mathbb{R}^k$, para qualquer aberto $A \subset \mathbb{R}^k$, isto é, $T\varphi(U) := \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Para cada $p \in M$, definimos

$$\begin{aligned} T_p(M,\iota) :=& (\iota \circ \varphi^{-1})_* \left(\varphi(p),\ \mathbb{R}^n_{\varphi(p)}\right) \\ =& \left(\iota(p),\ D(\iota \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\mathbb{R}^n_{\varphi(p)}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Quer dizer, $T_p(M,\iota)$ é um subconjunto de $T\mathbb{R}^N$ contido na fibra, sobre o ponto $\iota(p) \in \iota(M)$, da projeção na primeira coordenada $\mathrm{pr}_1: T\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Essa fibra é $\mathbb{R}^N_{\iota(p)}$, dentro do qual tomamos o subespaço linear que é a imagem de

$$D(\iota \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}: \mathbb{R}^n_{\varphi(p)} \to \mathbb{R}^N_{\iota(p)}, \tag{3.2.5}$$

visualizada na Figura 3.2.6.

Note que, supondo que $M \subset \mathbb{R}^N$, poderíamos (deveríamos, talvez) deixar de lado o pedantismo e escrever a frase acima da seguinte maneira: "Quer dizer, $T_p(M,\iota)$ é um subconjunto de $T\mathbb{R}^N$ contido na fibra, sobre o ponto $p \in M$, da projeção na primeira coordenada $\mathrm{pr}_1: T\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Essa fibra é $\mathbb{R}^N_p$, dentro do qual tomamos o subespaço linear que é a imagem de

$$D(\iota \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}: \mathbb{R}^n_{\varphi(p)} \to \mathbb{R}^N_p."$$

Exercício 3.2.16. Mostre que $T_p(M,\iota)$ é uma notação honesta para o que acabamos de definir, isto é, que $T_p(M,\iota)$ depende apenas de M, ι, p e não depende da escolha da carta coordenada (U,φ) (cujo domínio contém p, claro).

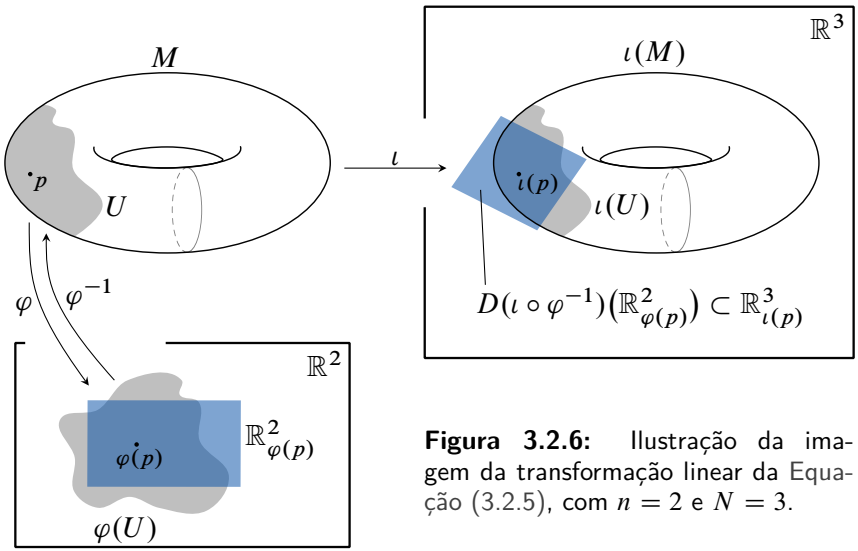


Figura 3.2.6: Ilustração da imagem da transformação linear da Equação (3.2.5), com $n = 2$ e $N = 3$.

A presença do "T" é uma maneira muito eficaz de nos lembrar que estamos falando de espaços Tangentes. $T_p(M, \iota)$ deve ser pensado como um subespaço linear de $\mathbb{R}^N_{\iota(p)}$ e será a *fibra*, sobre o ponto $\iota(p)$ do *fibrado tangente* $T(M, \iota)$, que vamos agora definir.

Definimos o *fibrado tangente* $T(M, \iota)$ como a união (disjunta)

$$T(M, \iota) := \bigsqcup_{p \in M} T_p(M, \iota) \subset T\mathbb{R}^N. \tag{3.2.6}$$

É importante sermos capazes de descrever essa definição em palavras: o fibrado tangente $T(M, \iota)$ é o subconjunto de $T\mathbb{R}^N$ de pontos cujas primeiras coordenadas são pontos $\iota(p)$ da imagem $\iota(M) \subset \mathbb{R}^N$ e cujas segundas coordenadas são vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N_{\iota(p)}$ tais que… Para continuar a frase e terminá-la agradavelmente, voltemos à Equação (3.2.5) e vejamos como descrever a imagem dessa transformação linear sem nos referirmos à carta coordenada (U, φ). Para tanto, temos que falar de curvas diferenciáveis e seus "vetores tangentes".

Sejam $a < b \in \mathbb{R}$ e $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ uma transformação diferenciável. Chamamos γ uma *curva diferenciável* (em $\mathbb{R}^n$). A derivada $D\gamma_t : \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n_{\gamma(t)}$ é uma transformação linear e denotamos por $\gamma'(t)$, chamado *vetor velocidade* da curva γ em $t \in (a, b)$, o vetor $D\gamma_t(1)$, ou seja, a imagem em $\mathbb{R}^n_{\gamma(t)}$ do vetor $1 \in \mathbb{R}_t$. Reciprocamente, não é difícil ver que todo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n_{\mathbf{x}}$ pode ser obtido como o

vetor velocidade $\gamma'(0)$ para alguma curva diferenciável $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ com $\gamma(0) = \mathbf{x}$, onde $\varepsilon > 0$.

Como tanto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ quanto M são variedades diferenciáveis, sabemos como decidir se uma função $\gamma\colon (a, b) \to M$ é diferenciável. Nesse caso, γ também é chamada uma curva diferenciável (em M). Se (U, φ) é uma carta coordenada da estrutura diferenciável em M e a imagem de $\gamma : (a, b) \to M$ está contida em U, então é consequência direta da definição de diferenciabilidade, que γ é uma curva diferenciável em M se e somente se $\varphi \circ \gamma$ é uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Assim, se $p \in U$, todo vetor em $\mathbb{R}^n_{\varphi(p)}$ pode ser obtido como um vetor velocidade da forma $(\varphi \circ \gamma)'(0)$, onde $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável com $\gamma(0) = p$.

Como estamos considerando o caso da variedade M suavemente mergulhada em $\mathbb{R}^N$, a composição $\iota \circ \gamma$ é uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^N$ (por quê?) cuja imagem está inteiramente contida em $\iota(M)$. Olhando a Figura 3.2.7, podemos exprimir o vetor velocidade $(\iota \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R}^N_{\iota(p)}$ como

$$\begin{aligned}(\iota \circ \gamma)'(0) &:= D(\iota \circ \gamma)_0(1) \\ &= D\left(\iota \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)} \circ D\left(\varphi \circ \gamma\right)_0(1) \\ &= D\left(\iota \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)} \left((\varphi \circ \gamma)'(0)\right).\end{aligned}$$

Usamos aqui a regra da cadeia usual, do cálculo em várias variáveis, para calcular a derivada da composição entre as transformações $\left(\iota \circ \varphi^{-1}\right) : \varphi(U) \to \mathbb{R}^N$ e $(\varphi \circ \gamma) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$. O que isso mostra é que os vetores na imagem da transformação linear $D\left(\iota \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}$ da Equação (3.2.5) são exatamente os vetores velocidade de curvas da forma $\iota \circ \gamma$, onde γ é uma curva diferenciável em M.

Estamos prestes a finalizar a nossa descrição verbal do fibrado tangente. Voltando à frase que queríamos completar, dizemos: o fibrado tangente $T(M, \iota)$ é o subconjunto dos pontos de $T\mathbb{R}^N$ cujas primeiras coordenadas são pontos $\iota(p)$ da imagem $\iota(M) \subset \mathbb{R}^N$ e cujas segundas coordenadas são vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N_{\iota(p)}$ da forma $\mathbf{v} = (\iota \circ \gamma)'(0)$, onde $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável com $\gamma(0) = p$, isto é, $T(M, \iota)$ é o conjunto de pontos $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in T\mathbb{R}^N$ tais que $\mathbf{x} \in \iota(M)$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N_{\mathbf{x}}$ é o vetor velocidade de uma curva da forma $\iota \circ \gamma$, onde γ é uma curva diferenciável em M.

E, seguindo a tradição de depedantificação iniciada acima, suponhamos que $M \subset \mathbb{R}^N$ seja uma variedade diferenciável suavemente mergulhada. Nesse caso, podemos esquecer a inclusão e falar do fibrado tangente $TM \subset T\mathbb{R}^N$, definido

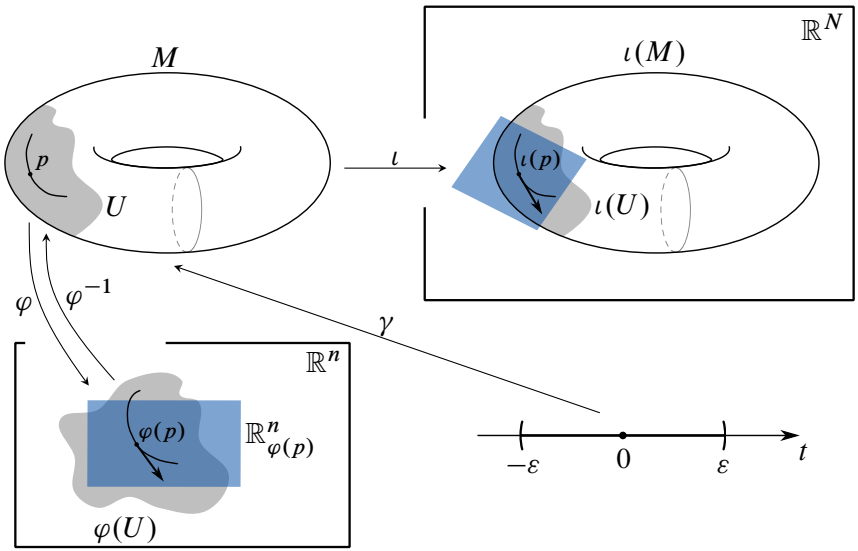


Figura 3.2.7: Descrição do fibrado tangente $T(M, \iota)$ em termos de vetores velocidade de curvas diferenciáveis.

por

$$TM := \big\{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in T\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : \mathbf{x} \in M \text{ e } \mathbf{v} = \gamma'(0), \\ \text{onde } \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ é uma curva diferenciável e } \gamma(0) = \mathbf{x}\big\}.$$

Nesse caso, como é claro da definição acima, o *espaço tangente* – a fibra sobre um ponto $\mathbf{x} \in M$ – é definido por

$$T_{\mathbf{x}}M := \big\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N_{\mathbf{x}} : \mathbf{v} = \gamma'(0), \\ \text{onde } \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ é uma curva diferenciável e } \gamma(0) = \mathbf{x}\big\}.$$

Como é sempre de bom tom, devemos falar de exemplos. O problema é que o único exemplo que podemos desenhar honestamente é o caso $M = (a, b) \subset \mathbb{R}$, com $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$. Nesse caso $TM = (a, b) \times \mathbb{R}$, que é tão banal que nem vale a pena o desenho.

Bem, passemos ao segundo exemplo, que pode ser desenhado, mas requer algum esforço: TS^1, o fibrado tangente do círculo. Como $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, seu fibrado tangente é, naturalmente, um subconjunto de $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$, e, como bem sabemos,

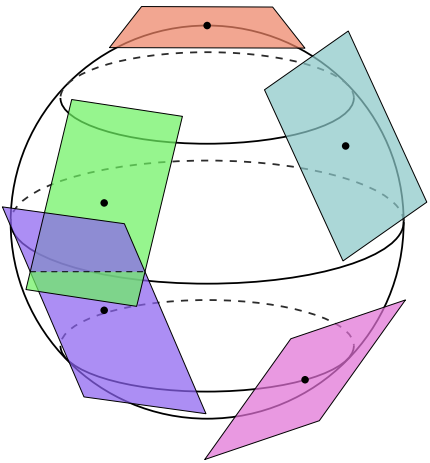


Figura 3.2.8: Visualização de alguns dos espaços tangentes que formam o fibrado tangente TS^2 da 2-esfera S^2. Quando a esfera está mergulhada suavemente em $\mathbb{R}^3$, TS^2 é um subconjunto de $T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$, que não sabemos desenhar. Na "caricatura" ao lado pode parecer que alguns espaços tangentes na figura se intersectam, mas isso é apenas uma ilusão: em $\mathbb{R}^6$ há bastante espaço para que os diversos planos sejam disjuntos uns dos outros. Na verdade, "sobre" cada ponto de S^2 há um $\mathbb{R}^3$ inteiro, que acolhe o plano tangente dentro de si, e todos esses $\mathbb{R}^3$s são disjuntos uns dos outros, como, claro, são seus subconjuntos.

entender subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ requer cuidado. Podemos tomar em S^1 a curva diferenciável $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, cujo vetor tangente em um ponto $\mathbf{x} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ é $\mathbf{u}_\mathbf{x} = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$.

Exercício 3.2.17. Para $t \in \mathbb{R}$ fixado e $\mathbf{x} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, mostre que todo vetor $\mathbf{v} \in T_\mathbf{x} S^1$ é da forma $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}_\mathbf{x}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} TS^1 &= \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} \in S^1,\ \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}_\mathbf{x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(\cos t, \operatorname{sen} t, -\lambda \operatorname{sen} t, \lambda \cos t) \in \mathbb{R}^4 : t, \lambda \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Exercício 3.2.18. Mostre que TS^1 é homeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$. Melhor ainda, ponha estruturas diferenciáveis em ambos TS^1 e $S^1 \times \mathbb{R}$ e mostre que o homeomorfismo que você encontrou é, na verdade, um difeomorfismo. *Sugestão:* Não seja do contra, não invente um homeomorfismo doentio para provar a primeira afirmação que torne a segunda falsa.

Neste momento a leitora poderia se perguntar, algo irritada, por que tivemos tanto trabalho para definir o produto cartesiano: afinal, é mais ou menos óbvio que $TM = M \times \mathbb{R}^n$ para toda n-variedade diferenciável M, não? Bem, não. A Figura 3.2.8 é uma caricatura do fibrado tangente TS^2 da 2-esfera. A figura tem uma esfera, e em cada ponto da esfera deveria estar desenhado o plano tangente a

S^2, embora tenhamos incluído apenas alguns, claro, ou a figura seria um borrão preto. O fibrado tangente ele próprio, no entanto, é um subconjunto de $\mathbb{R}^6$ no qual cada ponto da esfera tem todo um $\mathbb{R}^3$ "sobre" ele e os planos tangentes são subconjuntos desses $\mathbb{R}^3$s disjuntos e são, eles também, disjuntos. Pensando um pouco mais seriamente sobre esse caso, talvez o leitor fique menos seguro sobre a afirmação com que começamos o parágrafo.

Na realidade, está longe de ser verdade que fibrados tangentes são produtos cartesianos e n-variedades diferenciáveis M tais que $TM = M \times \mathbb{R}^n$ são especiais e têm nome: são chamadas *paralelizáveis*. O Exercício 3.2.18 mostra que S^1 é paralelizável. A 2-esfera, no entanto, não o é, embora para demonstrá-lo seja necessário recorrer ao Teorema de Poincaré–Hopf, que não discutiremos aqui. Esse teorema implica que todo campo contínuo de vetores tangentes a S^2 é igual a zero em algum ponto. Se TS^2 fosse difeomorfo a $S^2 \times \mathbb{R}^2$, bastaria tomar qualquer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, e $S^2 \times \{\mathbf{v}\}$ seria um campo que nunca se anula, o que contrairia o teorema. Por outro lado, todo grupo de Lie é paralelizável, incluindo a 3-esfera S^3, como já mencionamos na Seção 2.4.3.

Terminamos esta seção (abruptamente, talvez) mencionando que é possível provar que cada variedade suave compacta pode ser mergulhada suavemente dentro de algum $\mathbb{R}^N$. Para demonstrá-lo, é preciso fazer uso de partições da unidade, o que nos levaria longe demais dos assuntos que nos propusemos discutir aqui. Aceitando esse resultado, o que fizemos acima mostra, tão explicitamente quanto possível, o que é o fibrado tangente de uma variedade suave compacta. Mais geralmente, fibrados tangentes são definidos para toda variedade suave, compacta ou não, e não seria muito difícil fazê-lo depois de tudo o que já fizemos. Deixamos como exercícios os últimos passos que nos permitirão voltar, mesmo que um pouco enlameados, para cima do salto alto.

Exercícios 3.2.19. a) Seja M uma variedade diferenciável e $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ um mergulho suave. Mostre que o fibrado tangente $T(M, f)$ é uma variedade diferenciável e encontre um mergulho suave $F : T(M, f) \hookrightarrow T\mathbb{R}^N$.

b) Seja $g : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{N'}$ outro mergulho suave. Mostre que os fibrados tangentes $T(M, f)$ e $T(M, g)$ são *difeomorfos*, isto é, existe um homeomorfismo $\phi : T(M, f) \to T(M, g)$ que é diferenciável e cuja inversa também o é.

3.3 Construções de variedades

Nesta seção vamos sistematizar as construções de espaços, e de variedades, em particular, que vimos na Seção 3.1. Embora haja outras maneiras de construir

variedades, as duas que mais nos interessam nestas notas são como colagens de poliedros (polígonos, no caso de superfícies) – como fizemos com o espaço dodecaédrico de Poincaré, por exemplo – e como quocientes por ações de grupos – como fizemos com os toros e com o espaço lenticular $L(4,1)$ na Seção 3.1.3.

3.3.1 Simplexos, poliedros e colagens

Nesta seção, vamos definir os tipos de espaços topológicos, os *poliedros*, os tipos de identificações e quocientes que gostaríamos de tomar neles e mostrar que tais quocientes são bons espaços topológicos. Na Seção 3.3.2, discutiremos como nos certificarmos de que o resultado de uma colagem tridimensional é não apenas um bom espaço topológico, mas também uma variedade topológica. A existência de sabores mais refinados nos quocientes, como diferenciabilidade ou estruturas métricas, será discutida na Seção 3.3.4.

Começamos definindo simplexos, complexos simpliciais e poliedros. Fazemos isso economicamente, para ter ao nosso dispor os termos e a notação necessários para definirmos colagens. Recomendamos que a leitora interessada em mais detalhes consulte, por exemplo, Munkres (1984).

Um *n-simplexo* ou um *simplexo n-dimensional* é a envoltória convexa de $n+1$ vetores linearmente independentes em algum $\mathbb{R}^N$ (com $N \geqslant n+1$), isto é, um conjunto da forma

$$\Delta = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \,:\, t_0, \ldots, t_n \geqslant 0 \text{ e } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \tag{3.3.1}$$

onde $\{v_0, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto linearmente independente de vetores. Os coeficientes t_i acima são chamados *coordenadas baricêntricas* em Δ. Cada subconjunto $\{v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}\}$ de $k+1$ vetores é também linearmente independente e sua envoltória convexa é, portanto, um k-simplexo, chamado de *k-face* de Δ. As 0-faces de Δ são seus *vértices* e suas 1-faces são suas *arestas*. O *k-esqueleto* de Δ é a coleção de todas as faces de Δ de dimensão menor ou igual a k. O *interior* $\operatorname{Int}\Delta$ é o interior de Δ na topologia induzida, isto é, o conjunto de pontos da forma (3.3.1), tais que $t_i > 0$, para todo $i = 0, \ldots, n$, e o *bordo* de Δ é $\partial\Delta = \Delta \setminus \operatorname{Int}\Delta$. Assim, os k-esqueletos, para $0 \leqslant k < n$, são todos "exoesqueletos", já que estão contidos em $\partial\Delta$. Além disso, $\partial\Delta$ é a união de todas as suas $(k-1)$-faces, isto é, de todas as faces do $(k-1)$-esqueleto de Δ. As faces associadas a dois subconjuntos disjuntos $\{v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}\}$ e $\{v_{j_0}, \ldots, v_{j_l}\}$ cuja união é todo o conjunto de vértices $\{v_0, \ldots, v_n\}$ de Δ são ditas *faces opostas* em Δ.

Exercício 3.3.1. Dadas duas faces opostas Δ_1, Δ_2 do simplexo Δ, mostre que todo ponto de Δ pode ser escrito, de maneira única, como combinação convexa de pontos em Δ_1 e Δ_2, isto é, dado $v \in \Delta$ existem $p_1 \in \Delta_1$, $p_2 \in \Delta_2$ e $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ tais que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $v = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ e tanto os pontos p_1, p_2 quanto os números α_1, α_2 são unicamente determinados por v.

Esse exercício permite-nos definir simplexos indutivamente da seguinte maneira. Um 0-simplexo é um ponto. Um 1-simplexo é obtido como a envoltória convexa de um 0-simplexo v com um ponto $v_0 \neq v$. Isto é, um 1-simplexo é um segmento de reta. Um 2-simplexo é a envoltória convexa de um 1-simplexo Δ e um ponto v_0 fora do subespaço unidimensional afim que contém Δ. Assim, um 2-simplexo é um triângulo. Um 3-simplexo é um tetraedro obtido como envoltória convexa de um triângulo (2-simplexo) com um ponto fora do plano que o contém. E assim por diante.

Exercícios 3.3.2. a) Descreva, em detalhe, um 4-simplexo e todas as sua k-faces e k-esqueletos, para $0 \leqslant k \leqslant 4$.

b) Mostre que um n-simplexo é homeomorfo ao cone em um $(n-1)$-simplexo.

Um *complexo simplicial* é uma coleção finita[8] Σ de simplexos satisfazendo duas condições:

(i) as faces de um simplexo de Σ também estão em Σ e

(ii) a interseção de dois simplexos em Σ ou é vazia ou é uma face comum de ambos.

A união de todos os simplexos de um complexo simplicial Σ é o seu *poliedro*, denotado por $|\Sigma|$, e o *k-esqueleto* de Σ é o subcomplexo consistindo de todos os simplexos em Σ de dimensão menor ou igual a k. Se o poliedro de um complexo simplicial é um conjunto convexo em algum $\mathbb{R}^N$, temos um *poliedro convexo*, que poderia ter sido definido como a envoltória convexa de um conjunto finito de pontos. Dizemos que o poliedro $|\Sigma|$ de um complexo simplicial Σ é *triangulado* pelo complexo Σ. Mais geralmente, se X é um espaço topológico e $f : |\Sigma| \to X$ é um homeomorfismo, dizemos que o par (f, Σ) é uma *triangulação* de X. Os diagramas da esquerda e do centro na Figura 3.3.1 são dois exemplos de complexos

[8] A definição mais geral e mais corriqueira de complexo simplicial exige apenas que seja uma coleção localmente finita. Embora importantes, não consideraremos complexos infinitos aqui e preferimos, então, manter as coisas simples.

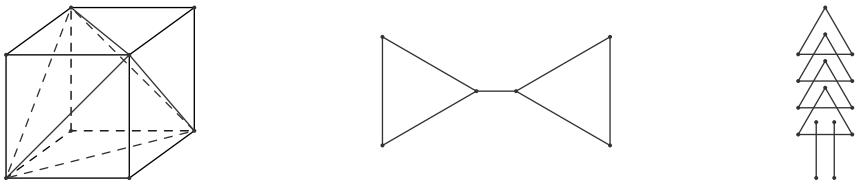


Figura 3.3.1: Esquerda: Um complexo simplicial Σ tal que $|\Sigma|$ é um cubo, isto é, uma triangulação do cubo. **Centro:** Um complexo simplicial na forma de uma gravata borboleta. **Direita:** Um espaço na forma de uma árvore de Natal, que *não é* um complexo simplicial, apesar de ser uma união de simplexos.

simpliciais e o 2-esqueleto do diagrama à esquerda, cujo poliedro é uma 2-esfera topológica, já que é o bordo de um cubo em $\mathbb{R}^3$, pode ser usado para triangular a 2-esfera. O diagrama à direita é um "não exemplo", já que viola a condição ii) na definição de complexo simplicial. Há uma outra maneira "típica" de se violar esta condição que não aparece nas figuras. Qual?

Chegamos agora à definição que realmente nos interessa.

Definição 3.3.3 (Colagem)**.** Uma *colagem n-dimensional (afim)* consiste de uma coleção finita (disjunta) de n-simplexos, uma coleção de pares de faces $(n-1)$-dimensionais distintas desses simplexos, tais que toda $(n-1)$-face aparece em exatamente um par, e uma escolha de homeomorfismo afim entre as faces de cada par.

Já vimos colagens antes, várias delas, e as tratamos com certo relaxamento. Agora queremos voltar ao básico, por assim dizer, e prestar atenção a cada passo. Isso não se deve apenas à mania de matemáticos de fazer tudo com precisão, mas ao fato de que essa mania é fundamental para a boa saúde da matemática. Veremos, a seguir, exemplos das vantagens dessa mania: mesmo em dimensão 3, onde nossa intuição geométrica nos é de grande serventia, é importante cuidar onde pisamos.

Bem, se formos honestos, a Definição 3.3.3 não define colagens exatamente, mas indicações de colagens. As colagens mesmo só acontecem após tomarmos o espaço quociente por alguma decomposição que ainda falta definir ou, mais precisamente, explicar claramente por que está implicitamente definida na Definição 3.3.3. Seja então $\{\Delta_r\}_r$ uma coleção finita de n-simplexos e seja $\{f_{rs}\colon \Delta_{rs} \to \Delta_{uv}\}_{r,s}$ uma coleção de homeomorfismos afins entre pares de $(n-1)$-faces dos simplexos da coleção (onde Δ_{rs} e Δ_{uv} são $(n-1)$-faces de Δ_r e Δ_u, respectivamente), satisfazendo as condições da Definição 3.3.3 e tais que, se $f_{rs}\colon \Delta_{rs} \to \Delta_{uv}$ é um deles, então $f_{uv} = f_{rs}^{-1}$. Cada $(n-2)$-face de um n-simplexo está

contida em exatamente duas de suas $(n-1)$-faces, de modo que a coleção de homeomorfismos $\{f_{rs}\}_{r,s}$ restritos às $(n-2)$-faces define exatamente dois homeomorfismos afins cujos domínios e contradomínios são $(n-2)$-faces dos simplexos de $\{\Delta_r\}$. Isso implica que cada $(n-2)$-face pertence a exatamente um *ciclo* de $(n-2)$-faces: por um ciclo queremos dizer uma coleção finita (claro) de $(n-2)$-faces distintas, com uma ordem circular tal que cada par de $(n-2)$-faces consecutivas nesta ordem (ou na ordem oposta) são domínio e contradomínio de restrições de homeomorfismos da coleção $\{f_{rs}\}_{r,s}$. A composição de todos o homeomorfismos em um desses ciclos define um homeomorfismo afim "de primeiro retorno" de uma $(n-2)$-face nela própria. Denotemos uma tal $(n-2)$-face por δ e por $f_\delta : \delta \to \delta$ o homeomorfismo de primeiro retorno obtido como composição de todos os homeomorfismos do ciclo que contém δ. Como f_δ é afim e preserva o conjunto de vértices de δ, ele é totalmente determinado por sua ação nos vértices, e como essa ação é uma permutação, há uma potência de f_δ que é a identidade. Disso segue que são finitas as órbitas de qualquer ponto de $\bigcup_r \partial\Delta_r$ por todas as composições possíveis dos homeomorfismos $\{f_{rs}\}_{r,s}$, e definimos a decomposição $\mathcal{D}$ de $\bigcup_r \Delta_r$ cujos elementos não triviais são exatamente essas órbitas (e os elementos triviais são os pontos de $\bigcup_r \operatorname{Int}\Delta_r$).

Exercício 3.3.4. Verifique que tudo o que foi dito no parágrafo acima está correto e que a decomposição $\mathcal{D}$ é semicontínua superior.

Vez por outra, por abuso de linguagem, também vamos nos referir ao quociente

$$\Big(\bigcup_r \Delta_r\Big)\Big/\mathcal{D}$$

como a *colagem* definida por $\{\Delta_r\}_r$, $\{f_{rs}\}_{r,s}$. Concluímos, então, que esse quociente é um espaço compacto metrizável.

Isso encerra a discussão da topologia "geral" das colagens, e podemos agora esquecer esse aspecto e passar a questões mais interessantes como, por exemplo, quando um colagem produz uma variedade topológica. Vejamos no exercício a seguir a resposta a essa pergunta no caso bidimensional.

Exercícios 3.3.5. a) Na Figura 3.3.2, estão indicadas três colagens bidimensionais compostas por dois triângulos cada. As setas indicam como as arestas devem ser identificadas: o homeomorfismo afim que as identifica deve fazer com que, se parametrizamos o domínio no sentido da seta, a orientação da imagem coincidirá com a orientação do contradomínio. Mostre que todos os três quocientes são superfícies (2-variedades) topológicas compactas. Duas delas coincidem (são homeomorfas a) superfícies da Figura 3.1.2. Quais?

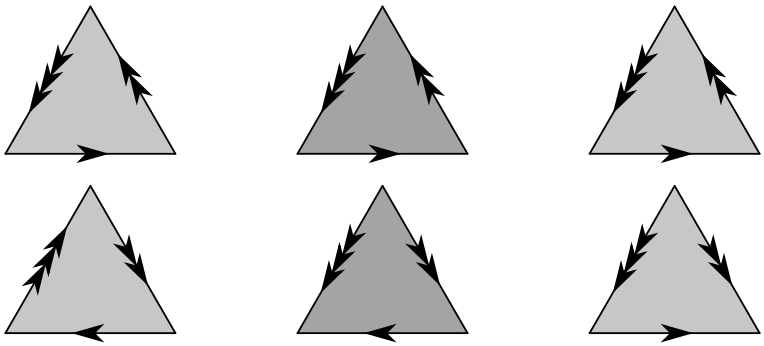


Figura 3.3.2: Nas três colunas da imagem, estão mostradas três maneiras diferentes de colar pares de triângulos, analisadas nos Exercícios 3.3.5.

b) Na verdade, o quociente de toda colagem bidimensional sempre é uma 2-variedade.[9] Prove essa afirmação.

3.3.2 Colagens e o número de Euler

Uma *n-célula* em um espaço topológico Hausdorff X é um subconjunto homeomorfo a uma bola aberta $\mathbb{R}^n$, isto é, um conjunto homeomorfo a

$$\operatorname{Int} D^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\},$$

com a condição de que o homeomorfismo, chamado de *mapa celular*, pode ser estendido continuamente à bola fechada D^n. Uma *decomposição celular* de X é uma partição de X em células de modo que, para todo n, o bordo de cada n-célula, isto é, a imagem de ∂D^n pelo mapa celular, esteja contido em uma união finita de células de dimensão menor que n. Se X possui uma decomposição celular finita, o *número* ou *característica de Euler* $\chi(X)$ de X é a soma do número de células de dimensão par menos o número de células de dimensão ímpar. São teoremas de topologia, que não provaremos aqui, que o número de Euler de X é independente da decomposição celular (finita), que escolhemos para X e que espaços homeomorfos têm o mesmo número de Euler.

Exercícios 3.3.6. a) Os quocientes das três colagens dos Exercícios 3.3.5 "herdam" decomposições celulares das colagens que os produzem. Descreva essas decomposições e calcule os números de Euler das três superfícies.

[9] O termo "superfície" é, em geral, reservado para 2-variedades conexas, e vamos tentar, por respeito histórico, mantê-lo assim.

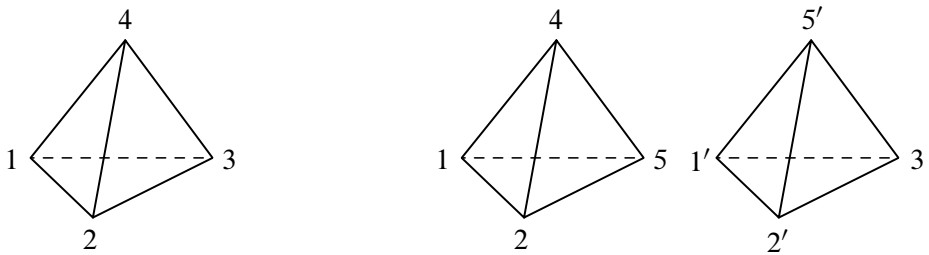


Figura 3.3.3: Os tetraedros a que se referem os exemplos no texto. Note que se colamos dois tetraedros ao longo de uma face triangular de cada um e depois esquecemos que essa face comum é uma face, obtemos novamente um tetraedro (topológico). Faremos isso com os dois tetraedros da direita, colando as faces [125] e [1′2′5′].

b) Descreva outras decomposições celulares para cada um dos três exemplos acima e verifique, nesses casos, que o número de Euler de fato não depende da decomposição escolhida.

c) Seja Σ um complexo simplicial (finito) e $f : |\Sigma| \to X$ um homeomorfismo que triangula o espaço topológico X. Mostre que $\chi(X)$ é igual à soma do número de k-simplexos de Σ com k par, menos a soma do número de ℓ-simplexos de Σ com ℓ ímpar.

Como mostrou o Item b dos Exercícios 3.3.5, não há nada a temer em dimensão 2: toda colagem produz uma 2-variedade. Em dimensão 3, a situação não é tão simples e é, por isso mesmo, muito mais interessante. Na Figura 3.3.3, mostramos os tetraedros usados em três colagens tridimensionais descritas a seguir, duas delas com apenas um tetraedro (à esquerda) e a terceira com dois (à direita). As colagens são especificadas por pares de triângulos distintos, bastando para tal que indiquemos quais vértices desses triângulos correspondem uns aos outros.

A primeira colagem, com um tetraedro apenas como na parte esquerda da Figura 3.3.3, é dada por

$$[124] \leftrightarrow [123] \quad \text{e} \quad [134] \leftrightarrow [234]. \tag{3.3.2}$$

Isso quer dizer, por exemplo, que o triângulo cujos vértices são os pontos etiquetados por $1, 2, 4$ é colado ao triângulo cujos vértices são os pontos etiquetados por $1, 2, 3$, de modo a fazer corresponder os vértices 1 e 1, 2 e 2 e 4 e 3 do primeiro e segundo triângulos, respectivamente.

A segunda colagem é especificada por

$$[124] \leftrightarrow [123] \quad \text{e} \quad [134] \leftrightarrow [243], \tag{3.3.3}$$

onde também nos referimos à parte esquerda da Figura 3.3.3.

A terceira colagem é

$$\begin{aligned} &[125] \leftrightarrow [1'2'5'], \quad [124] \leftrightarrow [1'2'3], \\ &[154] \leftrightarrow [2'5'3], \quad [1'5'3] \leftrightarrow [254]. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

onde agora a numeração se refere à parte direita, com dois tetraedros, da Figura 3.3.3.

Exercícios 3.3.7. a) Descreva decomposições celulares para os quocientes das três colagens acima e calcule seus números de Euler.

b) Mostre que os quocientes das segunda e terceira colagens são homeomorfos. *Sugestão:* Identificando $[125] \leftrightarrow [1'2'5']$ na segunda colagem, e esquecendo que essa 2-face existe, produz um único tetraedro.

c) Está tudo bem? A matemática continua a ser consistente?

Assumindo que a leitora, como já aconteceu com os autores, não prestou atenção meticulosa em como a segunda colagem é feita, ela pode ter obtido 0 como número de Euler para o quociente, enquanto que no terceiro exemplo esse número é certamente 1. Se os dois quocientes são homeomorfos como afirma o item seguinte nos Exercícios 3.3.7, pelos teoremas de topologia que dissemos serem teoremas (e não mentimos), esses números deveriam ser os mesmos. O que aconteceu? Caso o leitor tenha sido mais cuidadoso do que nós, explicamos qual erro cometemos. A identificação $[124] \leftrightarrow [123]$ identifica as arestas [14] com [13] e [24] com [23] (e [12] com [12], mas isso é irrelevante). A identificação $[134] \leftrightarrow [243]$ identifica as arestas [14] com [23] e [13] com [24]. Juntando todas essas identificações, acabamos colando [14] com [13] com [24] com [23] (com [14] de volta). Quanto aos vértices, a primeira identificação cola 1 e 2, e a segunda cola 3 e 4. Assim, no quociente, temos 2 vértices (quatro vértices do tetraedro identificados em dois pares), 2 faces bidimensionais (quatro 2-faces do tetraedro identificadas em pares) e 1 face tridimensional (o tetraedro ele próprio). Quanto às arestas, temos [12] e [34] a sós, e todas as outras 4 arestas identificadas umas com as outras. Portanto, o número de Euler deveria ser

$$2\ (\text{vértices}) - 3\ (\text{arestas}) + 2\ (\text{2-faces}) - 1\ (\text{3-face}) = 0,$$

mas não é. O erro na descrição acima está no comentário parentético que omitimos sobre a identificação da aresta [34] com a aresta [43] que a identificação de 2-faces [134] $\leftrightarrow$ [243] implica. Essa identificação, ao contrário da identificação (trivial) [12] $\leftrightarrow$ [12], não é nada irrelevante: ela *dobra ao meio* a aresta [34], o que faz com que surja um novo vértice (o ponto médio dessa aresta) na decomposição celular do quociente. Com esse novo vértice, o primeiro termo da soma acima se torna 3, e o resultado fica correto, igual a 1, como no terceiro exemplo.

Exercícios 3.3.8. a) Mostre que toda colagem tridimensional pode ser substituída por uma na qual o fenômeno discutido acima não ocorre, isto é, os homeomorfismos de primeiro retorno $f_\delta : \delta \to \delta$ a cada aresta (as $(n-2)$-faces nesse caso), definidos na Página 138, são sempre a identidade.

b) Considere uma colagem tridimensional e seja M seu quociente. Mostre que as projeções para M dos vértices, arestas, faces e tetraedros da colagem são uma decomposição celular de M se e somente se a colagem tem a propriedade do item anterior. Nesse caso, nos referimos a essas projeções pelos mesmos nomes, isto é, são os *vértices, arestas, faces* e *tetraedros* de M.

Com esse exercício em mente, chamamos de *boa colagem* uma colagem tridimensional com a propriedade de que os homeomorfismos de primeiro retorno $f_\delta : \delta \to \delta$ a cada aresta, definidos na Página 138, são sempre a identidade.

3.3.3 Colagens e 3-variedades

A discussão acima ainda não amadureceu completamente: falta sermos capazes de decidir quando o quociente de uma colagem tridimensional é uma 3-variedade topológica. As complicações encontradas nos exemplos da seção anterior talvez já tenham prevenido a leitora de que, ao contrário do que acontece em dimensão 2, colagens tridimensionais podem, sim, ter quocientes que não são 3-variedades. Para entender como isso acontece, temos que, por um lado, desenvolver técnicas para verificar que uma colagem é uma 3-variedade (topológica) e, por outro, reconhecer a existência de espaços tridimensionais que são compactos metrizáveis, que se tornam 3-variedades se (e somente se) removemos deles um número finito de pontos "estranhos". Em última análise, vamos entender que a diferença entre colagens em dimensões 2 e 3 reside em uma dimensão a menos, no fato de que a única 1-variedade fechada (compacta sem bordo) é o círculo (1-esfera), enquanto há, como sabemos, um número infinito de 2-variedades além da 2-esfera.

O critério para decidir se um espaço topológico (Hausdorff e com base enumerável, mas isso já sabemos que nossas colagens são e vamos parar de mencionar)

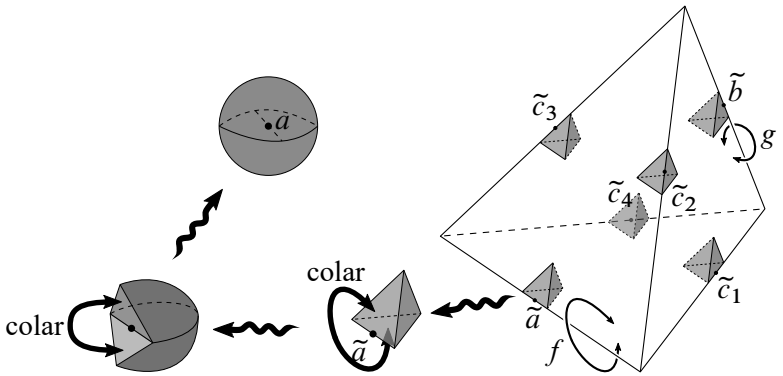


Figura 3.3.4: À direita, o tetraedro Δ com seis pontos $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, que são levados a três pontos distintos no quociente. Cada um deles está contido em uma vizinhança compacta (tetraédrica). À esquerda, vemos a vizinhança tetraédrica $N_{\widetilde{a}}$ de $\widetilde{a}$ ser deformada de maneira a realizar a identificação em suas faces prescrita por $[123] \overset{f}{\longleftrightarrow} [124]$. As faces triangulares superior e inferior de $N_{\widetilde{a}}$ são aproximadas uma da outra usando o segmento contendo $\widetilde{a}$ como dobradiça, enquanto o segmento oposto ao segmento que contém $\widetilde{a}$ é esticado e as faces laterais são ligeiramente estufadas. Ao final, temos uma bola fechada, vizinhança de a no quociente.

é uma 3-variedade é saber se todo ponto tem uma vizinhança que é homeomorfa a um aberto em $\mathbb{R}^3$. Os melhores e mais agradáveis abertos de $\mathbb{R}^3$ são as bolas abertas. Bolas fechadas, embora não sejam abertas, são também bastante agradáveis, já que seus interiores são bolas abertas. O critério que usaremos para identificar quocientes de colagens tridimensionais que são (e não são) 3-variedades será saber decidir se todos os pontos do quociente têm ou não uma vizinhança compacta (isto é, um compacto cujo interior contém o ponto em questão) homeomorfa a uma bola fechada em $\mathbb{R}^3$. Voltemos aos exemplos da Seção 3.3.2 e vejamos como fazê-lo.

No primeiro exemplo, colamos as quatro faces do tetraedro da esquerda na Figura 3.3.3 em dois pares pelas identificações (3.3.2), que agora batizamos com os símbolos f e g: $[123] \overset{f}{\longleftrightarrow} [124]$ e $[134] \overset{g}{\longleftrightarrow} [234]$. Denotemos o tetraedro por Δ e por M o espaço quociente. Na Figura 3.3.4, desenhamos seis pontos em Δ, indicados pelas letras $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}_i, i = 1, 2, 3, 4$, que são projetados a três pontos a, b, c em M. Os pontos indicados pelas letras $\widetilde{a}$ e $\widetilde{b}$ são, cada um, as únicas pré-imagens de pontos $a, b \in M$, enquanto os pontos indicados por $\widetilde{c}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, são as quatro pré-imagens de um terceiro ponto $c \in M$. Contendo cada um dos pontos, há na figura um pequeno tetraedro que, na topologia de Δ, é uma vizinhança compacta

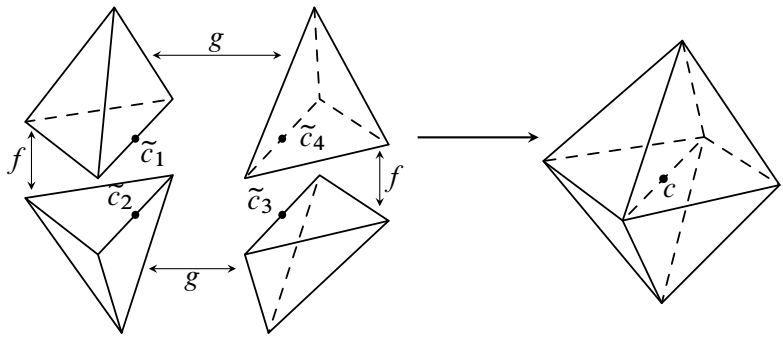


Figura 3.3.5: As vizinhanças tetraédricas dos quatro pontos c_i, $i = 1, 2, 3, 4$ rearranjadas de modo que fique claro que são coladas, como prescrito pelas identificações $[123] \overset{f}{\longleftrightarrow} [124]$ e $[134] \overset{g}{\longleftrightarrow} [234]$, como quatro quartos de um queijo octaédrico inteiro. O queijo inteiro, mostrado à direita, é uma vizinhança compacta, homeomorfa a uma bola fechada, do ponto c no quociente. A leitora deve verificar que não roubamos e que os quatro tetraedros à esquerda estão de fato posicionados da maneira que as identificações f e g acima nos mandam colá-los.

daquele ponto.

À esquerda na Figura 3.3.4, também se pode ver uma deformação da vizinhança tetraédrica $N_{\widetilde{a}}$ do ponto $\widetilde{a}$ que realiza a identificação que f, restrita a $N_{\widetilde{a}}$, prescreve. Pode parecer óbvio que o resultado dessa colagem é homeomorfo a uma bola fechada, mas não é má ideia demonstrá-lo em detalhe como pedimos que o leitor faça nos Exercícios 3.3.9. A colagem que g prescreve no bordo de $N_{\widetilde{b}}$ é análoga e, portanto, seu quociente também é uma bola (topológica) fechada em M contendo b em seu interior. Por fim, na Figura 3.3.5, rearranjamos as quatro vizinhanças tetraédricas $N_{\widetilde{c}_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, de modo a tornar explícito que as identificações em seus bordos, prescritas pelas restrições de f e g, colam-nas como os quatro quartos de um queijo (octaédrico), esse também (homeomorfo a) uma bola fechada em M contendo c em seu interior. Isso mostra que os pontos $a, b, c \in M$ têm vizinhanças homeomorfas a bolas abertas em $\mathbb{R}^3$. Como a, b, c são pontos arbitrários nas projeções em M dos interiores das arestas de Δ, isso prova que, esquecendo por enquanto as projeções em M dos vértices de Δ, o que resta é uma variedade topológica (já que pontos em M vindos de $\operatorname{Int}\Delta$ claramente têm boas vizinhanças).

Vejamos agora o que acontece com vizinhanças dos vértices de Δ quando projetadas para M. À esquerda na Figura 3.3.6, estão desenhadas quatro vizinhanças

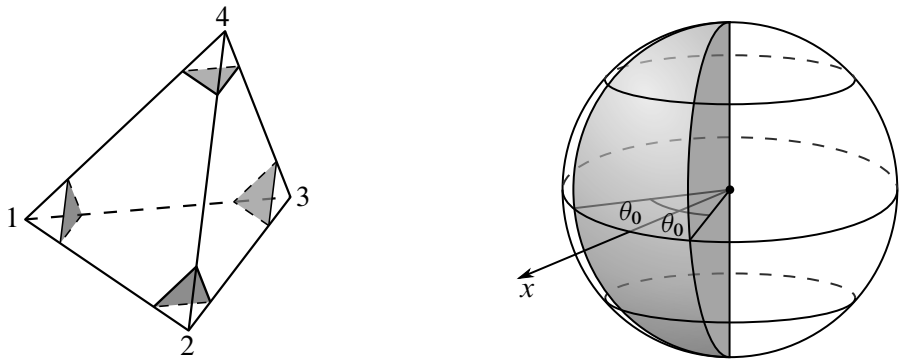


Figura 3.3.6: Esquerda: Vizinhanças tetraédricas dos vértices de Δ: em cinza as faces opostas aos vértices em cada pequeno tetraedro. As faces opostas aos vértices 1 e 2 aparecem na Figura 3.3.7. **Direita:** A cunha esférica denotada por F_θ no texto. A pseudoisotopia deve fechá-la como se fosse uma sanfona.

tetraédricas N_j, $j = 1, 2, 3, 4$, dos quatro vértices de Δ. Ao invés de repetir o que fizemos acima colando-as umas às outras, o que seria perfeitamente possível nesse caso simples, adotaremos uma estratégia diferente, mas equivalente, facilmente aplicável a casos mais complicados. O que faremos é estudar a colagem induzida pelas identificações f, g nos bordos dos (pequenos) triângulos opostos aos vértices em cada um dos tetraedros N_j (em cinza na Figura 3.3.6). O resultado dessa colagem formará o bordo (completo) de vizinhanças compactas dos quocientes dos vértices em M, vizinhanças essas provendo da projeção da união $\bigcup_j N_j$. Esse bordo tem duas componentes conexas, já que f, g colam N_1 com N_2 e N_3 com N_4 (e não misturam uns com os outros).

Ambas as colagens são análogas, e, na Figura 3.3.7, mostramos os triângulos opostos aos vértices 1 e 2, desenhados como os vemos olhando de cada vértice. A figura também indica as colagens das arestas desses triângulos induzidas por f e g. Embora essa colagem de triângulos não esteja entre os exercícios anteriores, é simples se convencer de que seu quociente é uma 2-esfera topológica. Pode parecer tentador nesse momento dizer simplesmente que uma 2-esfera é o bordo de uma 3-bola e que, portanto, descobrimos uma vizinhança da projeção $(1 \sim 2) \in M$ dos vértices 1 e 2, homeomorfa a uma bola fechada em $\mathbb{R}^3$. Mas não nos devemos apressar: afinal, mesmo em superfícies, há muitas 1-esferas que não são bordos de 2-discos. O motivo pelo qual podemos concluir que a projeção $V_{(1\sim 2)} \subset M$ de $N_1 \cup N_2$ para M é, de fato, uma 3-bola é que podemos – tomando tetraedros cada vez menores dentro de N_1 e N_2 e fazendo, com suas faces opostas a

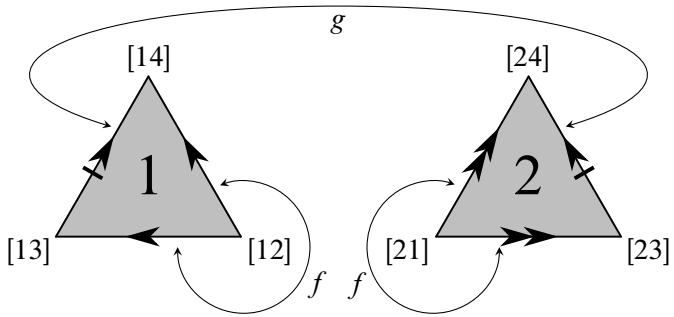


Figura 3.3.7: Os dois triângulos numerados 1 e 2 são faces, opostas aos vértices 1 e 2 da Figura 3.3.6, das vizinhanças tetraédricas N_1 e N_2, respectivamente. Cada vértice dos triângulos está etiquetado com o nome da aresta de Δ a qual ele pertence. As identificações induzidas por f e g nos bordos dos dois triângulos colam as arestas como indicado pelas setas. As identificações em cada triângulo, induzidas por f, produzem dois chapeuzinhos de festas de aniversário, e a identificação por g cola as bases circulares desses chapeuzinhos uma com a outra, formando uma 2-esfera topológica.

1 e 2, o mesmo raciocínio que fizemos com as de N_1 e N_2 – concluir que é possível preencher $V_{(1\sim 2)} \setminus \{(1 \sim 2)\}$ por esferas topológicas cada vez menores, convergindo para o ponto $(1 \sim 2) \in M$. O exercício a seguir coloca pingos em alguns i's, mas já podemos concluir que M é uma 3-variedade topológica, uma vez que mostramos que todos os seus pontos têm vizinhanças compactas homeomorfas a 3-bolas.

Exercícios 3.3.9. a) Seja X um espaço topológico. Uma *pseudoisotopia* em X é uma transformação contínua $h\colon X \times [0,1] \to X$ tal que, para cada $t \in [0,1)$, a *t-fatia* $h_t := h(\cdot, t)\colon X \to X$ é um homeomorfismo. Usando coordenadas esféricas

$$(x, y, z) = (r \operatorname{sen}\phi \cos\theta,\ r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,\ r\cos\phi)$$

em $\mathbb{R}^3$, onde $\theta \in [-\pi, \pi]$ e $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, defina uma pseudoisotopia (a mais simples que lhe ocorrer) na bola unitária $D^3 = \{r \leqslant 1\}$ tal que $h_1\left(F_{\theta_0}\right) = D^3$, onde $0 < \theta_0 < \pi$ e F_{θ_0} é a cunha esférica $\{\theta \in [-\theta_0, \theta_0]\} \subset D^3$ – veja a imagem direita da Figura 3.3.6.

b) Há muitas maneiras de definir uma pseudoisotopia satisfazendo o requerimento do item anterior. Caso isso ainda não tenha acontecido, encontre uma que a ajude a provar que o quociente de $N_{\widetilde{a}}$ pela identificação induzida por f, como

descrito acima (Página 144), é homeomorfo a uma bola fechada. Construa explicitamente o homeomorfismo.

c) Mostre como tornar rigoroso o argumento acima sobre $V_{(1\sim 2)}$ ser homeomorfo a uma bola fechada. *Sugestão:* Mostre que o cone na $(n-1)$-esfera é a n-bola: $C\left(S^{n-1}\right) = D^n$.

Vejamos agora que, na verdade, o que aconteceu com os pontos das arestas (abertas) no exemplo anterior não foi particular daquele exemplo: se uma colagem tridimensional é uma boa colagem (Exercícios 3.3.8 e parágrafo seguinte), então todos os pontos das arestas abertas dos tetraedros da colagem são levados a pontos no quociente com vizinhanças homeomorfas a bolas abertas em $\mathbb{R}^3$. Tomemos uma aresta δ_1 de um dos tetraedros da colagem. Como discutido na Página 138, δ_1 pertence a um ciclo de arestas, denotadas por δ_i, $i = 1, \ldots, k$, identificadas por homeomorfismos afins $f_i|_{\delta_i} : \delta_i \to \delta_{i+1}$, onde $\delta_{k+1} = \delta_0$, obtidos como restrições a essas arestas de homeomorfismos f_i, $i = 1, \ldots, k$, que identificam as 2-faces dos tetraedros que as contêm.

Tomando pequenos segmentos "opostos" às arestas δ_i, dentro dos tetraedros que as contêm, e unindo seus extremos aos de δ_i, como fizemos na Figura 3.3.4, podemos supor que os tetraedros colados pelos homeomorfismos f_i são distintos, denotados por Δ_i, $i = 1, \ldots, k$: isso facilita entender o desenho da Figura 3.3.8, onde supomos que $k = 6$ e arranjamos os 6 pequenos tetraedros contendo as arestas no ciclo de δ_1, de modo que as colagens f_i, $i = 1, \ldots, 5$ sejam realizadas movendo um pouquinho cada tetraedro, como indicam as setas, até encostá-lo no que está imediatamente ao lado. O resultado dessas identificações, que aparece no lado direito da Figura 3.3.8, é homeomorfo a uma semibola fechada. A última colagem feita, identificando a face triangular esquerda com a direita pelo homeomorfismo $f_k : \Delta_k \to \Delta_0$, consiste unir esses dois triângulos como se a aresta entre eles fosse uma dobradiça: consequência da hipótese de que $f_k \circ \cdots \circ f_1|_{\delta_1} = \mathrm{id}_{\delta_1}$, como a leitora poderá se convencer com alguma reflexão. Segue agora dos Exercícios 3.3.9 que todo ponto da aresta *aberta* δ_1 possui uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta em $\mathbb{R}^3$.

Exercícios 3.3.10. a) Verifique as duas últimas afirmações acima.

b) Na semibola fechada

$$D^3 \cap \{z \leqslant 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \leqslant 0\}$$

defina a equivalência $(x, y, 0) \sim (-x, -y, 0)$. Mostre que o quociente

$$K = \left(D^3 \cap \{z \leqslant 0\}\right) / \sim$$

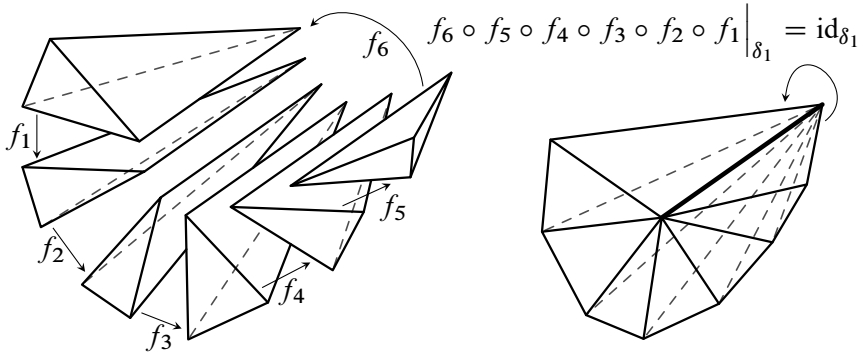


Figura 3.3.8: À esquerda aparecem 6 tetraedros cujas faces são identificadas em pares ciclicamente, como indicado pelas setas com as etiquetas f_i, $i = 1, \ldots, 6$. À direita, as identificações f_i, com $i = 1, \ldots, 5$, foram realizadas. A última identificação f_6 "fecha o livro", por assim dizer, identificando os dois triângulos superiores à esquerda e à direita utilizando a aresta central como se fosse uma dobradiça.

é um espaço compacto metrizável. Calcule seu número de Euler.

c) Denotemos por

$$\begin{aligned} K^\circ &= \left[\left(\operatorname{Int} D^3 \cap \{z \leqslant 0\}\right) \setminus \{(0,0,0)\}\right]/\sim \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1, z \leqslant 0\}/\sim, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência do item anterior. Mostre que K° é uma 3-variedade topológica.

d) Mostre que o espaço K°, definido na Equação (3.3.5), tem uma estrutura diferenciável e construa em K° um atlas folheado de modo que as folhas da folheação associada sejam compactas e homeomorfas ao plano projetivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. *Ajudinha:* Por definição, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ é o espaço de todas as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^3$. Esse espaço é homeomorfo à 2-esfera com pontos antípodas identificados que, por sua vez, é homeomorfa a um hemisfério com pontos antípodas do bordo identificados que, por sua vez é homeomorfo ao quociente de um dos três pares de triângulos da Figura 3.3.2.

e) Por que tivemos de tirar $(0,0,0)$ de K° no item anterior? Prove que o espaço K do Item b não é homeomorfo a D^3.

Como acabamos de ver, os únicos pontos nos quais o quociente M de uma colagem tridimensional pode não ser uma 3-variedade são os vértices de M, isto é, as projeções dos vértices dos tetraedros da colagem. Para entender o que acontece nesses pontos, consideramos pequenas vizinhanças tetraédricas como no exemplo acima e introduzimos a seguinte definição. Seja $v \in M$ um vértice, sejam v_i, $i = 1, \ldots, k$, os vértices dos tetraedros da colagem que são levados a v pela projeção e denote por N_i, $i = 1, \ldots, k$, pequenas vizinhanças tetraédricas dos v_i dentro dos tetraedros que os contêm. Denote por F_i, $i = 1, \ldots, k$, as faces em N_i opostas aos vértices v_i. É possível tomar os tetraedros N_i de modo que a colagem original restrita à coleção F_i seja uma colagem bidimensional, cujo quociente é, pelo Item b dos Exercícios 3.3.5, uma superfície topológica, chamada *elo* do vértice v e denotada por elo(v).

Exercícios 3.3.11. a) Certifique-se de que é verdadeira a afirmação acima: é sempre possível ajustar as vizinhanças tetraédricas N_i de forma a induzir uma colagem bidimensional na coleção de faces F_i, cujo quociente é, portanto, uma superfície compacta.

b) Mostre que o cone $C(\text{elo}(v))$ no elo de um vértice v é uma vizinhança compacta de v em M.

c) Descreva os elos de todos os vértices das colagens (3.3.3) e (3.3.4).

O teorema a seguir contém condições necessárias e suficientes para que o quociente de uma colagem seja uma 3-variedade (compacta, sem bordo).

Teorema 3.3.12 (Colagens são 3-variedades?)**.** *O quociente M de uma boa colagem tridimensional é uma 3-variedade se e somente se seu número de Euler é zero. Em geral, se $v_1, \ldots, v_k \in M$ são os vértices da colagem, vale a fórmula*

$$\chi(M) = k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \chi\left(\text{elo}(v_i)\right).$$

Demonstração. Sejam a, f e t os números de arestas, faces e tetraedros no quociente M, de modo que

$$\chi(M) = k - a + f - t.$$

Como cada tetraedro da colagem tem 4 faces, e faces são identificadas em pares, $f = 2t$.

Consideremos agora o elo de um vértice. Cada triângulo desse elo está dentro de um tetraedro de M e corresponde a um dos 4 vértices do tetraedro da colagem; cada aresta está dentro de uma face de M e corresponde a um dos 3 vértices dessa face (que vem de uma face triangular da colagem); e cada vértice do elo corresponde a uma aresta em M que tem dois extremos (que podem ser o mesmo vértice de M, mas são projeção de dois vértices distintos de tetraedros da colagem). Assim, somando as características de Euler dos elos de todos os vértices em M e lembrando que $f = 2t$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{k} \chi\left(\text{elo}(v_i)\right) = 2a - 3f + 4t = 2a - 2t.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\chi(M) &= k - a + f - t \\ &= k - a + t \\ &= k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \text{elo}(v_i),\end{aligned}$$

como no enunciado. Para completar a prova, faça os próximos exercícios. □

Exercícios 3.3.13. a) Caso ainda não o tenha feito, consulte um livro que apresente a classificação de superfícies fechadas em termos da sua característica de Euler e, em seguida, complete a prova do Teorema 3.3.12.

b) Onde, na demonstração do Teorema 3.3.12, foi usada a hipótese de que a colagem era uma boa colagem?

Para terminar esta seção, devemos revisitar a Seção 3.1.3 e verificar quais entre os exemplos apresentados são e não são 3-variedades:

Exercício 3.3.14. Mostre que o 3-toro, os espaços dodecaédricos de Poincaré e de Seifert–Weber e o quociente do octaedro à esquerda na Figura 3.1.9 são todos 3-variedades. Por outro lado, mostre que o exemplo de Thurston à esquerda na Figura 3.1.9 não é uma 3-variedade, já que o elo do único vértice do quociente é um toro.

3.3.4 Quocientes por ações de grupos

Como mencionado mais de uma vez, prestamos especial atenção a duas formas de construir variedades: como quociente de espaços topológicos – em geral compactos – por decomposições semicontínuas superiores (ou relações de equivalência cujas classes formam decomposições scs) e como quocientes de espaços – em geral com mais estrutura do que apenas a topológica, às vezes compactos, às vezes não – pela ação de grupos discretos. Nas seções anteriores, discutimos em maior detalhe a primeira dessas formas e, na Seção 3.3.3, chegamos a um critério que decide quando uma colagem tridimensional tem uma 3-variedade como quociente. Agora queremos fazer o mesmo com a segunda forma de tomar quocientes e desenvolver técnicas que nos permitam identificar bons quocientes nesse caso.

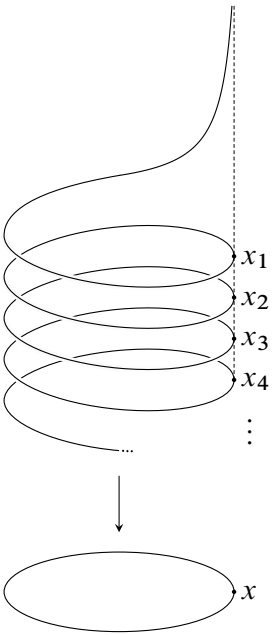
O conceito central nesse contexto é o de *recobrimentos*, que vamos introduzir a seguir. Sejam $X, \widetilde{X}$ espaços topológicos conexos por caminhos e seja $p\colon \widetilde{X} \to X$ uma transformação contínua. Dizemos que p é um *recobrimento* se todo $x \in X$ tem uma vizinhança $U \ni x$ tal que toda componente conexa de $p^{-1}(U)$ é levada homeomorficamente em U por p. Nesse caso, $\widetilde{X}$ é um *espaço de recobrimento* de X e a tripla $\left(\widetilde{X}, X, p\right)$ é, às vezes, também chamada de *recobrimento*. De vizinhanças U com a propriedade descrita acima diz-se que são *uniformemente recobertas* por p. Já vimos vários exemplos de recobrimentos, entre eles o paradigmático $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$. A Figura 3.3.9 mostra, por outro lado, um "não recobrimento", algo bom de se ter em mente.

Se $\left(\widetilde{X}, X, p\right)$ é um recobrimento, um homeomorfismo $\phi\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \phi = \phi$ é uma *transformação de recobrimento*; o conjunto de todas as transformações de recobrimento formam um grupo, chamado *grupo de recobrimento* de $\left(\widetilde{X}, X, p\right)$. No exemplo paradigmático, o grupo de recobrimento é o grupo de todas as translações inteiras em $\mathbb{R}$, já que $p(t+n) = e^{2\pi i(t+n)} = e^{2\pi i t} = p(t)$.

Exercícios 3.3.15. a) Mostre que se $p\colon \widetilde{X} \to X$ é um recobrimento, então p é sobrejetiva. *Dica:* Você terá de usar uma hipótese que, quando a fizemos acima, pode ter parecido desnecessária.

b) Verifique que o grupo de recobrimentos associado a um recobrimento $\left(\widetilde{X}, X, p\right)$ é, de fato, um grupo.

c) Verifique que as translações inteiras são, de fato, todas as transformações de recobrimento do exemplo paradigmático, isto é, que toda transformação de recobrimento nesse exemplo é uma translação inteira.



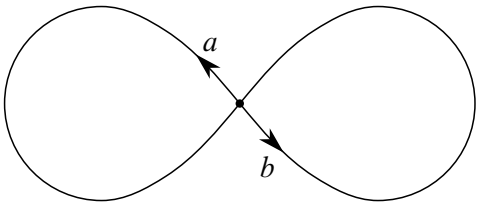


Figura 3.3.9: Esquerda: Uma projeção (vertical) que *não é um recobrimento*: embora as componentes conexas da pré-imagem de uma vizinhança do ponto x no círculo abaixo sejam projetadas homeomorficamente sobre suas imagens, a projeção da componente assintótica à linha vertical não é sobrejetiva. **Acima:** Uma *cunha* de dois círculos, isto é, o espaço X obtido identificando dois pontos de dois círculos distintos. Na Figura 3.3.10, mostramos vários recobrimentos de X.

d) Mostre que $p_k : S^1 \to S^1$, $p_k(z) = z^k$ é um recobrimento para todo $k \in \mathbb{Z}$ e identifique o grupo de recobrimento.

Vamos querer percorrer o caminho acima em outra direção: começar por um grupo G de homeomorfismos de um espaço Y e decidir se G é o grupo de recobrimentos associado a um recobrimento $p : Y \to X$, para algum espaço X. Começando do aspecto mais básico, uma transformação sobrejetiva p de um conjunto Y sobre um conjunto X induz um isomorfismo entre X e o conjunto das classes de equivalência da relação de equivalência em Y definida por $y \sim y' \iff p(y) = p(y')$. Assim o natural a fazer é considerar o conjunto $X := Y/G$ das classes da relação de equivalência definida em Y por $y \sim y'$ se (e somente se) existe $\phi \in G$ tal que $\phi(y) = y'$ (isto é, cujas classes de equivalência são as órbitas da ação de G em Y), tomar como $p : Y \to X$ a projeção natural, que leva cada ponto à sua classe de equivalência, e tomar em X a topologia quociente. Alguém poderia objetar que em momento algum foi dito que um grupo de recobrimento deveria *agir transitivamente nas fibras* do recobrimento, isto é, pontuar que *não é parte da definição* de um recobrimento $\left(\widetilde{X}, X, p\right)$ que, dados dois pontos quaisquer $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in \widetilde{X}$ tais que $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{x}')$, então deveria existir uma transformação de recobrimento

ϕ tal que $\phi(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$. Recobrimentos com essa propriedade adicional são especialmente agradáveis e têm nome: são chamados *recobrimentos regulares*. De todo modo, mesmo que nem todo recobrimento seja regular, a estratégia descrita acima pode dar certo e, quando isso acontece, o que acabamos de dizer é que o resultado é não apenas um recobrimento, mas um recobrimento regular.

Após essa discussão preliminar, enunciemos novamente (e claramente) o problema que queremos resolver. Dados um espaço topológico Y conexo por caminhos e um grupo G agindo à esquerda por homeomorfismos em Y, definimos a *G-órbita* de um ponto $y \in Y$ por

$$G \cdot y = \{\phi(y) \in Y : \phi \in G\}.$$

Definimos em Y a relação de equivalência cujas classes são as G-órbitas Y, isto

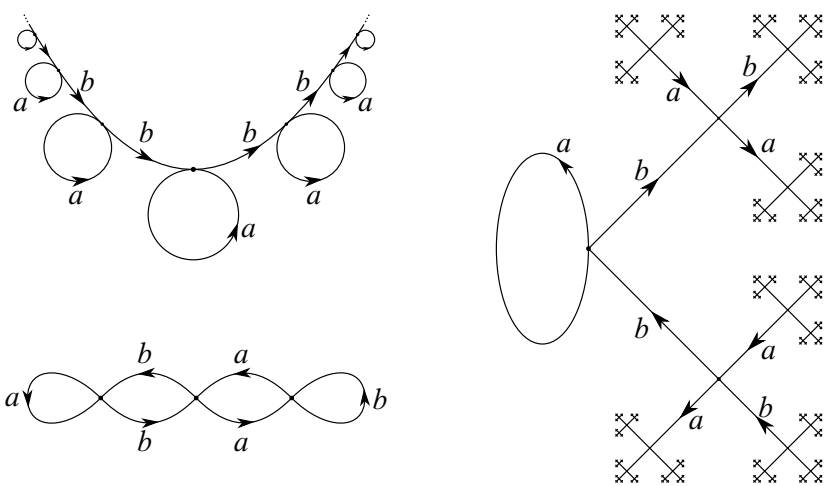


Figura 3.3.10: Três exemplos de espaços de recobrimento da cunha X de dois círculos do diagrama à direita na Figura 3.3.9. Todos são grafos *4-valentes*, isto é, cada um dos espaços, que denotaremos por $\widetilde{X}$, é um grafo cujos vértices têm exatamente quatro arestas incidentes, ou melhor, quatro extremos de arestas incidentes. Em cada caso, o recobrimento leva todos os vértices de $\widetilde{X}$ no único vértice v de X e, para cada $\widetilde{v} \in \widetilde{X}$, leva cada um dos quatro extremos de arestas incidentes em $\widetilde{v}$ nos quatro extremos de arestas incidentes em v, respeitando as etiquetas a, b e as orientações, levando arestas de $\widetilde{X}$ homeomorficamente sobre as arestas correspondentes em X. Entre esses recobrimentos, o único que tem um grupo de recobrimento não trivial é o da parte superior esquerda. Por quê?

é, dois pontos $y, y' \in Y$ são *G-equivalentes* se $y' \in G \cdot y$. O espaço quociente

(com a topologia quociente) de Y por essa equivalência é denotado por Y/G e $p\colon Y \to Y/G$ é a projeção $p(y) = G \cdot y$.

Questão 3.3.16. Com as definições e notação que acabamos de introduzir, queremos decidir se $(Y, Y/G, p)$ é um recobrimento.

O que nos realmente interessa é o caso em que Y é uma variedade e queremos garantir que o quociente também o seja, mas, para parte da discussão a seguir, essa hipótese extra é desnecessária, e deixamos para invocá-la mais tarde, quando for útil simplificar a discussão e evitar que tenhamos que lidar com detalhes técnicos que não nos interessam aqui (como, por exemplo, conectividade local por caminhos). Uma propriedade útil de ser mencionada logo é a seguinte. Lembre-se que uma transformação $f : X \to Y$ entre espaços topológicos é aberta se a f-imagem de abertos em X são abertos em Y.

Exercício 3.3.17. Mostre que se G é um grupo agindo por homeomorfismos no espaço topológico Y e Y/G e $p\colon Y \to Y/G$ são definidos como acima, então p é uma transformação aberta.

Vejamos algumas propriedades de recobrimentos para melhor entender o que são e por que são úteis para esse contexto. Obteremos, em particular, algumas condições necessárias que devem ser satisfeitas pela ação do grupo para podermos responder a Questão 3.3.16. Começamos com o seguinte lema básico, uma de várias situações em que recobrimentos se parecem com homeomorfismos.

Lema 3.3.18. *Sejam $\left(\widetilde{X}, X, p\right)$ um recobrimento, Y um espaço topológico conexo e $f, g\colon Y \to \widetilde{X}$ transformações contínuas tais que $p \circ f = p \circ g$. Então o conjunto $C = \{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ ou é vazio ou é todo o conjunto Y.*

Demonstração. Como em 99% das provas que envolvem conjuntos conexos, vamos mostrar que o conjunto $C \subset Y$ é aberto e fechado, sendo, portanto, o conjunto vazio ou todo Y, já que Y é conexo. Para ver que C é aberto, tome $y \in C$, tome uma vizinhança aberta $U \ni p(f(y)) = p(g(y))$ uniformemente recoberta por p e seja $\widetilde{U}$ a componente de $p^{-1}(U)$ que contém $f(y) = g(y)$. Defina ainda $V = f^{-1}\left(\widetilde{U}\right) \cap g^{-1}\left(\widetilde{U}\right)$. Como f, g são contínuas, V é aberto e $y \in V$. Por hipótese, $p|_{\widetilde{U}} \circ f|_V = p|_{\widetilde{U}} \circ g|_V$, mas como $p|_{\widetilde{U}}$ é um homeomorfismo (sobre sua imagem U), podemos "cancelá-lo" na equação anterior e concluir que $f|_V = g|_V$ e, portanto, que $V \subset C$.

A prova de que C é fechado é análoga e mais instrutiva se deixada como exercício. □

Exercício 3.3.19. Complete a demonstração do lema provando que C é um conjunto fechado.

Como estamos supondo que, em um recobrimento $\left(\widetilde{X}, X, p\right)$, os espaços $\widetilde{X}$ e X são conexos por caminhos e, portanto, conexos, podemos aplicar o Lema 3.3.18 a uma transformação de recobrimento $\phi\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ e à identidade $\mathrm{id}_{\widetilde{X}}$ e concluir que, se ϕ fixa algum ponto de $\widetilde{X}$, então $\phi = \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$. Além disso, o argumento usado na demonstração também prova o seguinte. Seja $x \in X$ um ponto qualquer e $U \ni x$ uma vizinhança uniformemente recoberta por p. Então, uma transformação de recobrimento permuta as componentes conexas de $p^{-1}(U)$ no seguinte sentido. Como $p \circ \phi = p$, ϕ permuta as pré-imagens de x. Sejam $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in p^{-1}(x)$ tais que $\phi(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$ e sejam $\widetilde{U}, \widetilde{U}'$ as componentes conexas de $p^{-1}(U)$ contendo $\widetilde{x}, \widetilde{x}'$, respectivamente. Então, $\phi|_{\widetilde{U}}$ é um homeomorfismo de $\widetilde{U}$ sobre $\widetilde{U}'$.

Exercício 3.3.20. Prove a afirmação acima.

Vamos isolar essas duas propriedades das transformações de recobrimento e transformá-las em definições. Seja G um grupo agindo em um espaço Y por homeomorfismos. A ação é *livre* se o único elemento de G que tem pontos fixos é a identidade. Um ação livre é *errante* se todo ponto de Y tem uma vizinhança cujas imagens por elementos de G são disjuntas, isto é, se para todo $y \in Y$, podemos encontrar $V \ni y$ tal que $\phi(V) \cap V = \varnothing$ para todo $\phi \in G$ com $\phi \neq \mathrm{id}_Y$: como G é um grupo, isso implica que $\phi(V) \cap \phi'(V) = \varnothing$ se $\phi \neq \phi' \in G$. Tais vizinhanças são ditas *errantes*.

Exercício 3.3.21. Suponha que Y é Hausdorff e que a ação de G em Y é livre e errante. Mostre que as órbitas de G são conjuntos fechados. A hipótese de Y ser Hausdorff é necessária?

Essas duas propriedades permitem-nos dar uma primeira resposta para a Questão 3.3.16. Suponhamos que Y é uma n-variedade conexa (e, portanto, conexa por caminhos) e suponhamos que a ação de G em Y é livre e errante. Podemos, então, concluir que Y/G é localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ e que $(Y, Y/G, p)$ é um recobrimento regular. Para ver isso, dado $y \in Y$, tomemos uma vizinhança $V \ni y$ tal que $\phi(V) \cap V = \varnothing$ para todo $\phi \in G$, $\phi \neq \mathrm{id}_Y$. Como Y é uma n-variedade, podemos assumir que V é homeomorfa a uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$. Se definimos $U = p(V)$, então, pela escolha de V e pelo Exercício 3.3.17, a restrição $p|_V\colon V \to U$ é aberta, contínua, injetiva e sobrejetiva, isto é, ela é um homeomorfismo. Como y é um ponto arbitrário, isso mostra que todo ponto de

Y/G tem uma vizinhança homeomorfa a uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$. Além disso, se V' é qualquer outra componente conexa de $p^{-1}(U)$, então existe $\phi \in G$ tal que $V' = \phi(V)$ e, como ϕ é um homeomorfismo de Y e $p|_V = p|_{V'} \circ \phi|_V$, podemos concluir que $p_{V'}$ também é um homeomorfismo de V' sobre U. Assim, vemos que U é uma vizinhança uniformemente recoberta e podemos concluir que todo ponto de Y/G tem uma tal vizinhança e, portanto, que $(Y, Y/G, p)$ é um recobrimento. Que se trata de um recobrimento regular segue do argumento anterior, que nos fez introduzir a definição dessa propriedade.

O leitor atento deve estar se perguntando por que não dissemos acima que Y/G é uma n-variedade. Não o fizemos porque, quando definimos variedades, exigimos que o espaço topológico subjacente fosse Hausdorff e veremos a seguir um exemplo que mostra que o quociente Y/G por uma ação livre e errante pode não sê-lo. Mais especificamente, vamos ver agora um exemplo de algo que deveria ter o direito de ser chamado de "superfície" exceto pelo fato de não ser Hausdorff.

Exercícios 3.3.22. Seja $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ e seja G o grupo gerado por

$$\phi(x, y) = \left(2x, \frac{y}{2}\right),$$

isto é, G é o grupo cíclico infinito cujos elementos são da forma

$$\phi^n(x, y) = \left(2^n x, \frac{y}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

a) Mostre que a ação de G é livre e errante. Conclua da discussão anterior que $(Y, Y/G, p)$ é um recobrimento e, em particular, o espaço quociente Y/G é conexo e todo ponto de Y/G tem uma vizinhança homeomorfa a um disco em $\mathbb{R}^2$.

b) Mostre que cada ponto $(x, 0) \in Y$, com $x \in [1, 2)$, pertence a uma G-classe diferente e que uma afirmação análoga vale para pontos no eixo vertical. Conclua que há uma quantidade não enumerável de pontos distintos em Y/G que são projeção de pontos do eixo horizontal de Y e a mesma afirmação vale sobre o eixo vertical. Qual o quociente do semieixo horizontal positivo pela ação de G?

c) Mostre que toda vizinhança aberta de um ponto da forma $p(x, 0) \in Y/G$ $(x \neq 0)$ intersecta toda vizinhança de qualquer ponto da forma $p(0, y) \in Y/G$. Conclua, em particular, que Y/G não é Hausdorff.

d) Mostre que quaisquer dois pontos distintos de Y/G na projeção do eixo horizontal em Y podem ser separados por abertos disjuntos, que o mesmo vale para pontos na projeção do eixo vertical e, se $x, y \neq 0$, então é possível separar $p(x, y)$ das projeções para Y/G de ambos os eixos.

e) Se $Y' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\} \subset Y$ e G é o mesmo grupo, mostre que Y'/G é Hausdorff e é, portanto, uma superfície como definimos anteriormente. Qual superfície? Descreva Y/G como a união de oito variedades conexas.

As esquisitices topológicas do exemplo dos Exercícios 3.3.22 devem-se ao fato de que vizinhanças de pontos no eixo vertical são espalhadas pela ação do grupo e chegam arbitrariamente próximas de todos os pontos do eixo horizontal e vice-versa. Introduzimos a seguinte condição que vai garantir que o quociente é, além do que já mostramos para ações errantes, também Hausdorff. Suponhamos que Y é localmente compacto. A ação de G em Y é *propriamente descontínua* se, para todo compacto $K \subset Y$, $\phi(K) \cap K \neq \varnothing$ para, no máximo, um número finito de homeomorfismos $\phi \in G$.

Exercício 3.3.23. Suponha que Y é Hausdorff e localmente compacto. Mostre que, se a ação de um grupo G em Y é livre e propriamente descontínua, então a ação é errante. A hipótese de Y ser Hausdorff é necessária?

Podemos agora enunciar o teorema importante desta seção:

Teorema 3.3.24. *Sejam Y uma n-variedade e G um grupo agindo em Y. Então, o quociente Y/G é Hausdorff e a projeção $p\colon Y \to Y/G$ é um recobrimento se e somente se a ação de G é livre e propriamente descontínua.*

Demonstração. Suponha que a ação de G em Y é livre e propriamente descontínua. Pelo Exercício 3.3.23 a ação é livre e errante e pelo argumento que vimos acima (Página 155), tudo o que precisamos provar é que a topologia quociente em Y/G é Hausdorff. Sejam $y, y' \in Y$ dois pontos em G-órbitas diferentes, isto é, cujas projeções em Y/G são pontos distintos. Como Y é Hausdorff e localmente compacto e como a ação de G é livre e errante, podemos tomar vizinhanças compactas $K \ni y$, $K' \ni y'$, errantes e disjuntas. Pelo Exercício 3.3.21, podemos assumir que a G-órbita de y não intersecta K' e G-órbita de y' não intersecta K. Então, pela hipótese da ação ser propriamente descontínua, $K \setminus \bigcup_{\phi \in G} \phi(K')$ e $K' \setminus \bigcup_{\phi \in G} \phi(K)$ contêm vizinhanças de y, y', respectivamente, cujas projeções são disjuntas. Isso mostra que o quociente Y/G é Hausdorff. A afirmação recíproca não será usada no que segue e a deixamos como exercício. □

Exercício 3.3.25. Complete a demonstração do Teorema 3.3.24, isto é, mostre que se Y é uma n-variedade e G é um grupo agindo em Y de forma que o quociente Y/G é Hausdorff e a projeção $p\colon Y \to Y/G$ é um recobrimento, então G age propriamente descontinuamente em Y.

Deveríamos agora revisitar os exemplos que discutimos anteriormente e ver quais deles se encaixam na hipóteses do Teorema 3.3.24. Por exemplo, subgrupos agindo em um grupo por multiplicação à esquerda ou à direita são sempre livres e toda ação por um grupo finito (em um espaço localmente conexo) é propriamente descontínua. Assim, todo quociente da 3-esfera pela ação de um subgrupo finito satisfaz as hipóteses do teorema e, portanto, seu quociente é uma 3-variedade.

Exercício 3.3.26. Reveja os exemplos que discutimos ao longo deste capítulo até aqui, escolha alguns que se encaixam nas hipótese do Teorema 3.3.24 e invente outros, ou variações, que não se encaixam. Discuta-os até ficar satisfeita.

Um exemplo nada (ou não muito) a ver, mas muito interessante

Vários dos quocientes que vimos acima eram quocientes pela ação de um grupo isomorfo a $\mathbb{Z}$. Tais ações têm lugar privilegiado na matemática e pertencem a uma área chamada de *sistemas dinâmicos*. Mencionamos aqui um exemplo de grande importância nessa área, que tem alguma relação com o que estivemos discutindo. Seja α um número irracional e considere a transformação do círculo S^1, pensado como círculo unitário no plano complexo, definida por

$$R_\alpha\colon S^1 \to S^1, \quad R_\alpha(z) = e^{2\pi\alpha i} z$$

isto é, R_α é a rotação do círculo unitário por ângulo $2\pi\alpha$.

Exercícios 3.3.27. a) Mostre que todas as órbitas de R_α são densas em S^1, isto é, que o fecho de conjuntos da forma

$$\left\{R_\alpha^n(z) = e^{2\pi n\alpha i} z : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

é todo o círculo S^1, para qualquer escolha do ponto $z \in S^1$. *Sugestão:* Se o fecho de uma órbita não é todo o círculo, tome o maior (ou um entre os maiores) intervalo(s) complementar(es) e considere suas iteradas por R_α. Lembre-se de que S^1 tem comprimento finito.

b) Declaramos dois pontos de S^1 equivalentes se pertencem à mesma órbita, isto é, $z \sim z'$ se e somente se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $R_\alpha^n(z) = z'$. Mostre que o conjunto das classes de equivalência é infinito não enumerável.

c) Mostre, por outro lado, que a topologia quociente em $S^1/\sim$ não é Hausdorff e não o é de maneira radical: a topologia quociente em $S^1/\sim$ é a topologia *indiscreta*, isto é, os dois únicos conjuntos abertos são o vazio e todo o espaço.

d) Para ganhar pontos extras e entender algo fascinante, mas com pouca relação ao assunto dessas notas, explique a afirmação seguinte, que requer algum conhecimento da teoria da medida de Lebesgue. Assumindo o Axioma da Escolha, podemos considerar um conjunto $\Lambda \subset S^1$ que contém exatamente um ponto de cada órbita de R_α. Tal conjunto não pode ser mensurável no sentido de Lebesgue. Se o fosse, poderíamos associar a Λ sua medida de Lebesgue, que é um número no intervalo $[0, 2\pi]$. Mas $S^1 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R_\alpha^n(\Lambda)$ e todos esses conjuntos são disjuntos e têm a mesma medida, o que leva a uma contradição. Lembre-se que a σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis contém todos os conjuntos abertos, todos os conjuntos fechados e muitos, muitos outros subconjuntos de $[0, 1]$ e fique devidamente surpreso com a afirmação acima.

O recobrimento universal

Não seria razoável falar de recobrimentos sem falar do *recobrimento universal*. Para fazê-lo, temos que introduzir alguns conceitos. Uma *homotopia* é uma transformação contínua $H : X \times [0, 1] \to Y$. Duas transformações $f, g : X \to Y$ são *homotópicas* se existe uma homotopia H tal que $H(\cdot, 0) = f$ e $H(\cdot, 1) = g$. Um *caminho* no espaço Y é uma transformação contínua $\gamma : [0, 1] \to Y$ e seus *pontos inicial* e *final* são $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$, respectivamente. Dois caminhos γ, δ em Y cujos pontos inicial e final são os mesmos são *homotópicos* se o são como transformações contínuas de $[0, 1]$ em Y, por uma homotopia H *com extremos fixos*, isto é, tal que $H(0, t) = \gamma(0) = \delta(0)$ e $H(1, t) = \gamma(1) = \delta(1)$ para todo $t \in [0, 1]$ – veja o lado esquerdo da Figura 3.3.11. Um caminho $\gamma : [0, 1] \to Y$ é *fechado* se $\gamma(0) = \gamma(1)$ e um caminho fechado é *homotopicamente trivial* se é homotópico ao caminho constante (igual aos extremos $\gamma(0) = \gamma(1)$). Um espaço topológico conexo por caminhos X é *simplesmente conexo* se todo caminho fechado em X é homotopicamente trivial. Por exemplo, a esfera S^2 é um espaço simplesmente conexo, como ilustrado na imagem central da Figura 3.3.11. O mesmo não vale para o toro T^2: o caminho mostrado no lado direito da figura não é homotopicamente trivial.

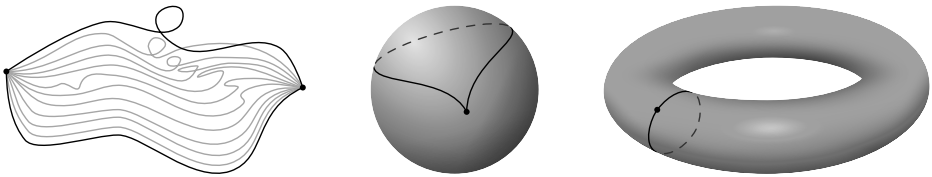
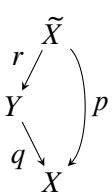


Figura 3.3.11: Esquerda: Uma homotopia H com extremos fixos entre dois caminhos (em negro). As imagens de alguns dois caminhos intermédios $H(\cdot, t)$ estão mostradas em cinza. **Centro:** Cada caminho fechado na esfera S^2 é homotopicamente trivial, podendo ser contraído, continuamente, ao ponto-base. **Direita:** Ao contrário, o toro bidimensional T^2 contém caminhos fechados não triviais, como o exemplo mostrado na imagem.

Após todas essas definições preliminares, voltamos a recobrimentos. Se um recobrimento $\left(\widetilde{X}, X, p\right)$ é tal que $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, então o chamamos de *recobrimento universal* de X. O artigo usado com recobrimento universal é o artigo definido, isto é, falamos *do* recobrimento universal de um espaço X, já que, quando um tal recobrimento existe, é possível provar que ele é único, a menos de equivalência. Além disso, se o recobrimento universal de X existe, então ele também recobre qualquer recobrimento de X, isto é, se $\left(\widetilde{X}, X, p\right)$ é o recobrimento universal de X e se (Y, X, q) é um recobrimento, então existe um recobrimento $\left(\widetilde{X}, Y, r\right)$ tal que $q \circ r = p$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo.



Não provaremos essas afirmações aqui (a leitora interessada pode consultar Massey (1991) e Munkres (2000), por exemplo), mas veja o exercício a seguir. A Figura 3.3.12 mostra o recobrimento universal da cunha de dois círculos da Figura 3.3.9 à direita.

Exercício 3.3.28. Releia o parágrafo acima, defina a noção de *equivalência* entre recobrimentos e dê uma definição precisa da unicidade do recobrimento universal que mencionamos.

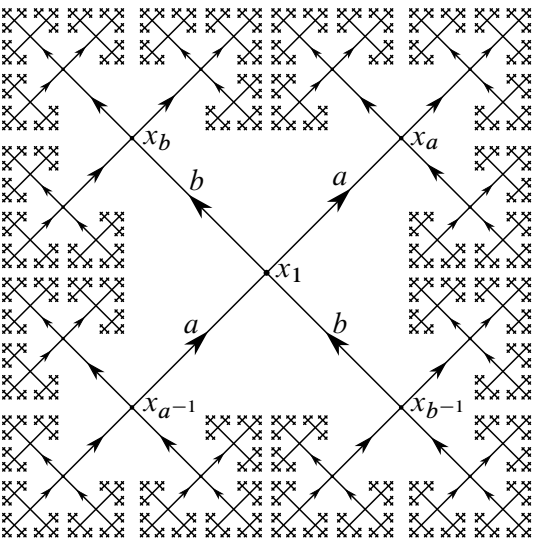


Figura 3.3.12: O recobrimento universal da cunha de dois círculos é uma árvore infinita. Para construí-la, começamos, por exemplo, do ponto central x_1, e andamos na direção a desenrolando-a até "não voltar a x_1" e criar o ponto x_a. Se andamos na direção b e a desenrolamos criamos o ponto x_b, se andamos na direção oposta a a criamos o ponto $x_{a^{-1}}$, e se andamos na direção oposta a de b, criamos $x_{b^{-1}}$. Continuando assim, criamos os pontos x_{aa}, x_{ab}, $x_{ab^{-1}}$, $x_{a^{-1}b}$ etc.

Uma propriedade, frequentemente simples de verificar, que implica conexidade simples é *contratibilidade*: um espaço topológico X é *contrátil* se existe um ponto $x_0 \in X$ tal que a identidade id_X é homotópica à transformação constante $f : X \to X$, $f(x) \equiv x_0$, por uma homotopia fixando x_0, isto é, se existe uma homotopia $H : X \times [0,1] \to X$ tal que $H(x,0) = x$ e $H(x,1) = x_0$, para todo $x \in X$, e $H(x_0, t) = x_0$, para todo $t \in [0,1]$.

Exercícios 3.3.29. a) Prove que se X é contrátil, então X é simplesmente conexo.

b) Prove que $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo para todo $n \geqslant 1$.

c) Prove que todo caminho fechado em S^n que não é sobrejetivo é homotopicamente trivial.

Nem todo espaço simplesmente conexo é contrátil, e o exercício acima sugere, mas não prova, que as n-esferas são simplesmente conexas quando $n > 1$. Embora seja verdade que todas as n-esferas, com $n \geqslant 2$, são simplesmente conexas, a dificuldade em demonstrar esse resultado é que existem caminhos fechados em S^n cujas imagens são toda a esfera, chamados *caminhos que preenchem a esfera*. Isso dificulta usarmos, em geral, o argumento que o leitor deve ter usado no Item c dos Exercícios 3.3.29. Não vamos nos alongar mais nesse assunto, além de dizer que é possível provar que todas as esferas de dimensão maior que 1 são simplesmente conexas e que o círculo, como deve parecer óbvio, não o é, embora isso

também requeira prova. Em particular, todos os quocientes de S^3 pela ação de um grupo finito são 3-variedades cujo recobrimento universal é a 3-esfera.

4 Geometria tridimensional

Neste capítulo, vamos explicar como equipar variedades tridimensionais com geometrias e quais são as geometrias tridimensionais possíveis. Certamente, todos conhecemos bem a variedade tridimensional $\mathbb{R}^3$ – a mãe de todas 3-variedades – e estamos bem acostumados à sua geometria *euclidiana.* O que pode ser menos óbvio é que existem também outros tipos de geometrias, em particular as chamadas geometrias *não euclidianas,* tanto em espaços compactos quanto não compactos. Aqui vamos sobretudo estudar a geometria *esférica* tridimensional – a geometria "natural" da 3-esfera – mas falaremos também sobre a geometria *hiperbólica* que, apesar de ser muito comum em dimensão 3, é pouco conhecida, exceto entre especialistas.

Antes de discutirmos geometrias nas 3-variedades, devemos voltar ao início e perguntar-nos o que *exatamente* temos em mente quando falamos de "geometria". A nossa intuição, influenciada sem dúvida pelas nossas vidas tridimensionais, sugere-nos que propriedades geométricas têm a ver com a *medição* de tamanhos de "formas" ou "objetos" geométricos. Isso inclui a medição de distâncias, por exemplo, com uma régua ou fita métrica, e a medição de ângulos, com um transferidor ou um outro instrumento. Nesse contexto, a *tridimensionalidade* refere-se à ideia de três direções perpendiculares, ao longo das quais podemos medir distâncias, ou seja, ao fato que muitos dos objetos tridimensionais na nossa

vida quotidiana possuem comprimento, largura e profundidade. Em termos mais matemáticos, já vimos que as propriedades geométricas como distâncias e ângulos têm mais "rigidez" que as propriedades topológicas: dois espaços topológicos homeomorfos podem ter aparência geométrica diferente, como, por exemplo, o toro bidimensional de revolução e o toro bidimensional "quadrado" discutidos na Seção 3.1.1.

Mesmo supondo que concordamos que *distâncias* e *ângulos* devem ser as noções básicas de geometria, não é imediatamente óbvio como definir essas noções numa 3-variedade geral. Dentro da variedade não há nem réguas nem transferidores, e mesmo se os tivéssemos, o processo de medição com eles exigiria que fôssemos capazes de alinhar a nossa fita métrica com a linha que pretendemos medir ou o nosso transferidor com o ângulo. O significado da palavra "alinhar" não é sequer claro neste contexto[1] – como saber se o processo de "alinhar" preserva as propriedades geométricas dos nossos instrumentos de medição? – e como podemos falar de propriedades "geométricas" sem termos definido primeiro a geometria? Quer dizer, como podemos nos certificar de que os instrumentos não foram distorcidos no processo de alinhamento e que vão funcionar corretamente por toda parte? Quais as maneiras corretas de transportá-los e alinhá-los? Já que produtores de instrumentos de medição raramente oferecem garantia internacional contra defeitos de fabricação, seria difícil encontrar um que ofereça garantia válida em outros universos.

Para evitar o problema de transporte e alinhamento de instrumentos de medição, podemos imaginar que nos foram disponibilizados uma régua e um transferidor *em cada ponto do espaço.* Isso elimina a necessidade de transportar os instrumentos de um ponto a outro e, nessa situação, podemos, sim, inventar maneiras sofisticadas de medir distâncias e ângulos, mas encontramos uma outra dificuldade: não temos jamais uma noção de *escala global*, já que agora usamos instrumentos "independentes" em cada ponto do espaço. Para comparar os instrumentos localizados em pontos diferentes, seria necessário alinhá-los e é exatamente disso que estamos abrindo mão: é essa a maneira que decidimos "resolver" o problema e temos de aceitar, como consequência, que a medição de ângulos e distâncias dentro de uma variedade é um *processo inerentemente local*, sujeito a uma escala de comprimentos e ângulos que *depende de onde estamos*.

Essa ideia da localidade dos conceitos de comprimento e de ângulo, que variam suavemente de ponto a ponto, constitui a essência de *geometria riemanniana*, assim chamada em homenagem a Bernhard Riemann (1826–1866). O artigo filo-

[1] mas será esclarecido quando falarmos de isometrias

sófico revolucionário de Riemann (1868) e os desenvolvimentos matemáticos a ele relacionados criaram uma nova fundação para a geometria moderna de variedades suaves. Não vamos discutir aqui, nem de longe, toda a teoria de variedades riemannianas, mas há muitos livros excelentes e de fácil leitura sobre o assunto, notadamente o livro do Carmo (1988): encorajamos a leitora a dar uma olhada nesse e em outros livros para aprender mais sobre o assunto.

Por agora, vamos nos limitar a um sumário bastante simplificado do que Riemann propôs. O produto escalar em $\mathbb{R}^n$, definido na Equação (1.4.5), permite-nos calcular comprimentos de vetores e ângulos entre vetores usando as fórmulas:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}, \qquad \cos \measuredangle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}. \tag{4.0.1}$$

Deste modo, o produto escalar contém e determina todas as propriedades da geometria euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Como um exemplo mais sofisticado, consideremos uma curva em $\mathbb{R}^n$, parametrizada pelo parâmetro $t \in [0, 1]$, ou seja, uma função $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, dada em coordenadas por $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n$. Supondo que todas as componentes γ_i são funções diferenciáveis ($1 \leqslant i \leqslant n$), o *comprimento da curva* γ é dado pela equação

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\big(\gamma_1'(t)\big)^2 + \big(\gamma_2'(t)\big)^2 + \cdots + \big(\gamma_n'(t)\big)^2}\, dt.$$

A grande raiz quadrada na fórmula acima é, na verdade, o comprimento do *vetor tangente* $\gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)\big)$ à curva γ e, por isso, podemos simplificar a fórmula acima para

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Vamos agora descrever como repetir essas construções numa variedade suave M. Mesmo que não saibamos quase nada sobre M, temos, em cada ponto $p \in M$, o espaço tangente T_pM cujos elementos são vetores tangentes a M no ponto p. Como T_pM é um espaço vetorial, queremos introduzir algum tipo de produto escalar em T_pM para cada $p \in M$. Assim, chegamos à ideia de uma *métrica riemanniana* em M, que é, essencialmente, uma escolha "razoável" de um produto escalar em cada espaço tangente T_pM. Mais precisamente, uma *métrica riemanniana* na variedade diferenciável M é uma escolha de formas bilineares simétricas $\big\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\big\}_{p \in M}$, em cada espaço tangente T_pM, satisfazendo três propriedades adicionais:

(i) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p \geqslant 0$ para cada $\mathbf{v} \in T_p M$;

(ii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p = 0$ se e somente se $\mathbf{v} = 0$;

(iii) A forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ depende suavemente do ponto p.

A primeira propriedade acima garante que podemos associar, a cada vetor tangente $\mathbf{v} \in T_p M$, o *comprimento de* $\mathbf{v}$ definido como $\sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p}$. A segunda propriedade diz que o único vetor de comprimento 0 é o vetor trivial $\mathbf{0} \in T_p M$; finalmente, a terceira propriedade garante que a geometria não faz coisas estranhas quando viajamos pela variedade M.

Com essas definições, podemos começar a medir distâncias e ângulos na variedade M. Por exemplo, o comprimento de uma curva suave em M na métrica riemanniana é dado pela mesma fórmula que usamos em $\mathbb{R}^n$: para uma função suave $\gamma : [0, 1] \to M$, definimos

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}\, dt = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)}}\, dt,$$

onde o subíndice "$\gamma(t)$" lembra-nos do fato que agora o produto escalar não é um objeto global, mas, ao invés disso, temos de usar as formas bilineares $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em cada um dos pontos $p = \gamma(t)$ visitados pela curva. Analogamente, o cosseno de um ângulo entre duas curvas diferenciáveis pode ser calculado usando, na fórmula à direita em (4.0.1), o produto escalar *no ponto de interseção* entre as duas curvas.

4.1 Variedades riemannianas e suas isometrias

Dada uma variedade suave M, existe tipicamente um número enorme de possíveis geometrias riemannianas em M, cada uma delas com sua própria maneira de medir distâncias e ângulos. Entretanto, o nosso principal objeto de estudo serão geometrias riemannianas particularmente "bonitas", ou seja, geometrias com muita simetria.

No que segue, o termo *variedade riemanniana* vai se referir a uma variedade suave M equipada com uma métrica riemanniana. Nesta seção, vamos considerar as simetrias de uma variedade riemanniana M, ou seja, as transformações inversíveis que preservam tanto a estrutura da variedade suave quanto a geometria riemanniana de M. Tais transformações são chamadas de *isometrias* e definidas rigorosamente abaixo.

Definição 4.1.1. Seja M uma variedade suave com uma métrica riemanniana $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in M}$. Um difeomorfismo $\psi : M \to M$ é uma *isometria* de M se, para cada ponto $p \in M$ e cada par de vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$, vale a igualdade

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \big\langle D\psi_p(\mathbf{v}), D\psi_p(\mathbf{w}) \big\rangle_{\psi(p)}. \tag{4.1.1}$$

O conjunto de todas as isometrias de M é denotado por $\mathrm{Isom}(M)$. Além disso, quando a variedade M é orientada, o grupo de isometrias que preservam a orientação de M é denotado $\mathrm{Isom}^+(M)$.

Exercício 4.1.2. Verifique que os conjuntos $\mathrm{Isom}(M)$ e $\mathrm{Isom}^+(M)$ são grupos com a operação binária $\circ$ de composição de funções.

Quando um ponto $p \in M$ é levado a um outro ponto $\psi(p)$ por uma isometria $\psi \in \mathrm{Isom}(M)$, então a Equação (4.1.1) diz que o produto escalar de vetores tangentes em $\psi(p)$ pode ser calculado em termos do produto escalar em p. Em outras palavras, as propriedades geométricas locais em p e em $\psi(p)$ são "as mesmas", isto é, comprimentos e ângulos não mudam quando objetos geométricos são transformados por isometrias.

Consequentemente, se uma variedade riemanniana possui muitas isometrias, elas nos permitem "alinhar" os instrumentos de medição, ou seja, usar um instrumento em vários lugares diferentes na variedade. Na situação ideal, a variedade admite uma coleção de isometrias suficiente para *levar cada ponto a cada outro ponto*, ou seja, mover um instrumento de medição de um lugar inicial a qualquer outro lugar. Além disso, precisamos da capacidade de rodar os instrumentos de medição livremente, ou seja, de *levar cada direção a cada outra direção*. Vamos agora introduzir nomes um pouco mais altaneiros para essas duas propriedades.

Definição 4.1.3. Seja M uma variedade riemanniana e seja $\mathrm{Isom}(M)$ o grupo de isometrias de M.

(i) A variedade riemanniana M é chamada *homogênea* se, para quaisquer pontos $p, q \in M$, existe uma isometria $\psi \in \mathrm{Isom}(M)$ tal que $\psi(p) = q$.

(ii) A variedade riemanniana M é *isotrópica* se, para cada ponto $p \in M$ e quaisquer vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$, de norma 1, existe uma isometria $\psi \in \mathrm{Isom}(M)$ que fixa p e satisfaz $D\psi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

Note que os significados das palavras "homogêneo" e "isotrópico" da definição acima são diferentes – mais restritivos – do que em alguns outros livros; veja também a Observação 4.4.8. Logo veremos que $\mathbb{R}^n$ é um exemplo de variedade riemanniana que possui ambas as propriedades, mas também veremos que existem outros exemplos de variedades com esse tipo de simetria.

4.1.1 Isometrias da geometria euclidiana

Por agora, vamos centrar a nossa atenção no espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$ com sua geometria euclidiana, determinada pelo produto escalar definido em (1.4.5), ou seja, o produto

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \tag{4.1.2}$$

Como discutido acima, o produto escalar (4.1.2) é um exemplo muito especial de uma métrica riemanniana. Para que desenvolvamos a intuição certa sobre variedades riemannianas, devemos sempre nos lembrar que todas as propriedades "globais" consideradas aqui são na verdade propriedades *locais* (mesmo que elas sejam "constantes").

Para começar, vamos analisar difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ com derivadas constantes. Suponhamos primeiro que $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo e que sua derivada satisfaz $D\psi_p \equiv \mathrm{id} : T_p\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n$, ou seja, a matriz jacobiana de ψ é a matriz identidade em cada ponto p. Explicitamente, escrevendo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\psi(\mathbf{x}) = \big(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \psi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n)\big)$, a propriedade $D\psi \equiv \mathrm{id}$ diz que, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \equiv 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \equiv 0, \text{ quando } i \neq j.$$

Como consequência dessa hipótese, o valor $\psi(\mathbf{x})$, em qualquer ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pode ser calculado como

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}) &= \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= \psi(0, x_2, \ldots, x_n) + \int_0^{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_n)\, dt \\
&= \psi(0, x_2, \ldots, x_n) + \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} \right) dt \\
&= \psi(0, x_2, \ldots, x_n) + \int_0^{x_1} (1, 0, \ldots, 0)\, dt \\
&= \psi(0, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, 0, \ldots, 0).
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Continuando esse processo com as demais coordenadas $x_2, \ldots, x_n$, obtemos, após n integrações,

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{0}) + \mathbf{x}. \tag{4.1.4}$$

Até ao presente ponto, os nossos cálculos basearam-se apenas na análise em várias variáveis reais, resultando na Equação (4.1.4). Entretanto, para estabelecer essa

equação, precisamos de utilizar a hipótese muito forte que a derivada $D\psi$ seja constante e igual à matriz identidade em todos os pontos.

Vejamos agora como estabelecer a Equação (4.1.4) sob a hipótese mais fraca de $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, juntamente com mais uma pequena hipótese, à que vamos chegar no processo. O fato que ψ é uma isometria diz-nos que ψ preserva o produto escalar euclidiano, ou seja, satisfaz

$$\langle D\psi_p(\mathbf{v}), D\psi_p(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle, \tag{4.1.5}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$ e para quaisquer vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Note que fizemos aqui mais do que uma simples repetição da Equação (4.1.1) – pois usamos também o fato que a métrica riemanniana em $\mathbb{R}^n$ é dada pelo produto escalar em todos os pontos: $\langle \cdot, \cdot\rangle_p \equiv \langle \cdot, \cdot\rangle$. Além disso, identificamos os espaços tangentes $T_p\mathbb{R}^n$, em cada $p \in \mathbb{R}^n$, com o espaço $\mathbb{R}^n$ ele mesmo, algo que é feito 99% do tempo, embora tacitamente, em cálculo de várias variáveis.

Uma observação imediata é que o lado direito da Equação (4.1.5) não depende do ponto p. Em particular, quando $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor unitário fixo e quando $p = \mathbf{x} + t\,\mathbf{u}$, então a derivada do lado direito em relação à variável t é igual a zero. Consequentemente, a derivada do lado esquerdo é também zero:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle D\psi_{\mathbf{x}+t\mathbf{u}}(\mathbf{v}), D\psi_{\mathbf{x}+t\mathbf{u}}(\mathbf{w})\rangle = 0.$$

A igualdade acima vale para todos vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, e para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Como o produto escalar é não degenerado, podemos concluir que, na verdade, temos

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} D\psi_{\mathbf{x}+t\mathbf{u}} = 0, \tag{4.1.6}$$

onde $D\psi_{\mathbf{x}+t\mathbf{u}}$ é a matriz jacobiana da transformação ψ no ponto $p = \mathbf{x} + t\,\mathbf{u}$, e onde o lado direito representa a matriz zero.[2]

Graças à Equação (4.1.6) não precisamos postular que a derivada de ψ seja igual à identidade por toda parte. Ao invés disso, podemos fazer essa suposição apenas na origem. Assim, chegamos à hipótese mais fraca $D\psi_{\mathbf{0}} = \mathrm{id} : T_{\mathbf{0}}\mathbb{R}^n \to T_{\mathbf{0}}\mathbb{R}^n$, suficiente para concluir, usando a Equação (4.1.6), que $D\psi$ é na verdade constante e igual à identidade em todo $\mathbb{R}^n$.

Exercício 4.1.4. Justifique a última afirmação. *Dica:* Utilize a técnica introduzida na Equação (4.1.3).

[2] A derivada de uma matriz de funções é simplesmente a matriz formada pelas derivadas dessas funções.

O resultado das calculações feitas acima pode ser enunciado como o seguinte lema.

Lema 4.1.5. *Se* $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *satisfaz* $D\psi_{\mathbf{0}} = \mathrm{id}$*, então a igualdade* (4.1.4) *vale para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Vamos agora elaborar uma descrição concreta do grupo $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, caracterizando quais difeomorfismos $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são isometrias da geometria euclidiana. Primeiro, vamos considerar um difeomorfismo ψ que fixa a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, ou seja, que satisfaz $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Para simplificar a notação, vamos denotar por J a matriz jacobiana de ψ na origem, ou seja, $J = D\psi_{\mathbf{0}}$. Conforme a Equação (4.1.5), se ψ é uma isometria da geometria euclidiana, então a matriz J satisfaz

$$\big\langle J\mathbf{v}, J\mathbf{w}\big\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \tag{4.1.7}$$

para todos vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Quem resolveu os Exercícios 1.4.5, já sabe que o conjunto de matrizes $n \times n$ satisfazendo (4.1.7) é de fato o grupo $\mathrm{O}(n)$ de matrizes *ortogonais.* Por outro lado, quando $A \in \mathrm{O}(n)$ é qualquer matriz ortogonal, então a transformação $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ (tratando $\mathbf{x}$ como um vetor-coluna, como sempre) é também uma isometria da geometria euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Exercícios 4.1.6. a) Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que a derivada da transformação linear $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ é constante e igual à matriz A.

b) Usando a Definição 4.1.1, verifique a afirmação feita imediatamente acima desses exercícios. Em outras palavras, mostre que a transformação $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ é uma isometria da geometria euclidiana, desde que $A \in \mathrm{O}(n)$. *Dica:* Aplique o resultado do item anterior.

Voltemos ao nosso raciocínio e expliquemos, novamente, o que estamos fazendo. Suponhamos que $\psi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria que satisfaz $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Quando $J = D\psi_{\mathbf{0}}$, então J é uma matriz ortogonal e, com sua ajuda, podemos produzir uma outra isometria $f(\mathbf{x}) = J\mathbf{x}$, que também fixa a origem. Segundo o resultado do Exercício 4.1.2, a composição $f^{-1} \circ \psi$ é também uma isometria. Além disso,

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ \psi)(\mathbf{0}) &= f^{-1}\big(\psi(\mathbf{0})\big) = f^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \text{ e}\\ D(f^{-1} \circ \psi)_{\mathbf{0}} &= J^{-1}J = \mathrm{id}\,.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.1.5, concluímos que a composição $f^{-1} \circ \psi$ satisfaz

$$(f^{-1} \circ \psi)(\mathbf{x}) = (f^{-1} \circ \psi)(\mathbf{0}) + \mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x},$$

ou seja, $f^{-1} \circ \psi$ é a identidade – o elemento neutro do grupo $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Isso significa que $f = \psi$, ou seja, que a isometria ψ é dada pela fórmula $\psi(\mathbf{x}) = J\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Vamos recordar essa observação como um teorema.

Teorema 4.1.7. *Cada isometria euclidiana $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que fixa a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tem a forma $\psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para uma matriz $A \in \mathrm{O}(n)$. Reciprocamente, cada matriz $A \in \mathrm{O}(n)$ determina uma isometria euclidiana.*

Naturalmente, existem também isometrias de $\mathbb{R}^n$ que não fixam a origem. Por exemplo, a *translação* pelo vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{4.1.8}$$

leva a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ao ponto $\mathbf{b}$.

Exercício 4.1.8. Mostre que, para qualquer vetor fixo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, a translação $\tau_{\mathbf{b}}$ é uma isometria da geometria euclidiana. *Sugestão:* Calcule a derivada de $\tau_{\mathbf{b}}$ e verifique que ela satisfaz a Equação (4.1.5).

Para completar a nossa descrição do grupo $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, vamos combinar as isometrias da forma $\psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para $A \in \mathrm{O}(n)$ com as translações da forma (4.1.8). Como composições de isometrias são isometrias também, obtemos dessa maneira as isometrias *afins* dadas pela equação

$$\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A \in \mathrm{O}(n),\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1.9}$$

O seguinte teorema afirma que todos os elementos de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ têm essa forma.

Teorema 4.1.9. *Cada isometria $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ da geometria euclidiana tem a forma* (4.1.9) *para uma única matriz ortogonal $A \in \mathrm{O}(n)$ e um único vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ uma isometria qualquer e definamos $\mathbf{b} = \phi(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$. A composição $\psi := \tau_{-\mathbf{b}} \circ \phi$ é, então, uma isometria de $\mathbb{R}^n$, onde $\tau_{-\mathbf{b}}$ é a translação pelo vetor $-\mathbf{b}$. Desta forma, temos

$$\psi(\mathbf{0}) = \big(\tau_{-\mathbf{b}} \circ \phi\big)(\mathbf{0}) = \big(\phi(\mathbf{0})\big) - \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

ou seja, ψ é uma isometria que fixa a origem. Graças ao Teorema 4.1.7, existe uma única matriz $A \in \mathrm{O}(n)$ tal que $\psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Como consequência, para qualquer

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \overbrace{\left(\tau_{\mathbf{b}} \circ \tau_{-\mathbf{b}}\right)}^{\text{identidade}} \circ \phi(\mathbf{x}) \\ &= \tau_{\mathbf{b}} \circ \left(\tau_{-\mathbf{b}} \circ \phi\right)(\mathbf{x}) \\ &= (\tau_{\mathbf{b}} \circ \psi)(\mathbf{x}) \\ &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}.\end{aligned}$$

□

Exercícios 4.1.10. Considere o *grupo de translações* de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Tsl}(\mathbb{R}^n) = \{\tau_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\}.$$

a) Mostre que o grupo $\mathrm{Tsl}(\mathbb{R}^n)$ é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{R}^n$.

b) Dê um exemplo de um grupo G para o qual existe um homomorfismo $h : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \to G$ com $\operatorname{Ker} h = \mathrm{Tsl}(\mathbb{R}^n)$. Conclua que $\mathrm{Tsl}(\mathbb{R}^n)$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

c) Mostre que as transformações ortogonais $\mathrm{O}(n)$ formam um subgrupo de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, mas *não* um subgrupo normal.

Voltemos por um momento à nossa observação intuitiva que é sempre possível "alinhar" os instrumentos de medição em $\mathbb{R}^n$, ou seja, que podemos encontrar isometrias de $\mathbb{R}^n$ que *levam cada ponto a cada outro ponto* e, ao mesmo tempo, *levam cada direção a cada outra direção*. Essa primeira propriedade implica que todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ são "os mesmos" geometricamente – em particular, não podemos determinar onde estamos em $\mathbb{R}^3$ usando apenas a geometria ao nosso redor. A segunda propriedade exprime a realidade de $\mathbb{R}^n$ não ter nenhuma direção preferida – todas as direções são "as mesmas". Em termos práticos, um nave espacial precisa de estrelas ou outros objetos de referência no céu para se orientar no espaço – perceber sua própria orientação em um espaço $\mathbb{R}^3$ completamente vazio é impossível.

Usando a terminologia da Definição 4.1.3, podemos dizer que o espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ é um exemplo de uma variedade homogênea e isotrópica, mas achamos importante que o leitor veja em detalhe como essas propriedades intuitivamente óbvias correspondem à nossa descrição abstrata de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ estabelecida no Teorema 4.1.9.

Exercícios 4.1.11. a) Usando Definição 4.1.3 e o Teorema 4.1.9, verifique que $\mathbb{R}^n$ é uma variedade riemanniana homogênea e isotrópica.

b) Como enunciado na Definição 4.1.1, o conjunto de isometrias de $\mathbb{R}^n$ que preservam a orientação é denotado por $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$. Mostre que $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ é um subgrupo normal de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

c) Mostre que todas as transformações $\psi \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^n)$ têm a forma

$$\psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \text{ onde } A \in \mathrm{SO}(n) \text{ e } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

4.2 Geometria da 3-esfera

A descoberta, no século XIX, de geometrias não euclidianas, revelou que o $\mathbb{R}^n$ não é a única geometria "bonita" em dimensão n. Em particular, as esferas S^n constituem exemplos extremamente interessantes de variedades homogêneas e isotrópicas. Nesta seção, vamos discutir a *geometria esférica,* principalmente em dimensão 3, e formalizar a ideia intuitiva da geometria esférica ser "bonita", mostrando que ela é homogênea e isotrópica, assim como o $\mathbb{R}^n$. Porém, veremos também algumas diferenças entre a geometria euclidiana de $\mathbb{R}^n$ e a geometria esférica – *não euclidiana* – de S^n. Uma dessas diferenças, muito importante, é topológica e é óbvia para quem estudou o Capítulo 3: esferas são variedades compactas. Uma maneira com que isso se manifesta do ponto de vista geométrico é que a geometria esférica fornece modelos de universos *finitos* (de volume finito, em particular), que "se fecham sobre si mesmos".

Como no Capítulo 1, vamos tratar a n-esfera S^n como a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Se $p = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ é um ponto em S^n, então o espaço tangente T_pS^n é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n+1}$ resultando da translação até à origem do subespaço tangente afim que passa por p.

Para determinar os espaços tangentes explicitamente para todo $n \geqslant 1$, precisamos de alguns fatos de análise real – fatos que provavelmente todos aprendemos no passado, mas que relembramos aqui mesmo assim. Se $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então o *gradiente* de F num ponto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ é o vetor

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \right).$$

Um *ponto crítico* de F é qualquer ponto $\mathbf{y}$ no qual $\nabla F(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Pontos críticos são, informalmente, os pontos nos quais o gráfico de F se torna "horizontal". Vamos

também precisar do *conjunto de nível zero* de F,

$$Z = F^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k : F(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Suponhamos agora que $Z \neq \varnothing$ e Z não contém nenhum ponto crítico de F. Nessa situação, o conjunto de nível Z é uma variedade suave, de dimensão $k-1$, dentro de $\mathbb{R}^k$. Além disso, para qualquer ponto $\mathbf{x} \in Z$, o espaço tangente $T_{\mathbf{x}}Z$ consiste de vetores ortogonais ao gradiente de F em $\mathbf{x}$,

$$T_{\mathbf{x}}Z = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k : \langle \mathbf{v}, \nabla F(\mathbf{x}) \rangle = 0\}. \tag{4.2.1}$$

Para compreender o que tudo isso significa, pensemos primeiro no caso de $k = 2$. Nesse caso, o gráfico de uma função suave $F = F(x, y)$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$, que corta o plano xy ao longo do conjunto Z. A hipótese que Z não contém pontos críticos de F garante que o gráfico de F não se torna "horizontal" perto do plano xy, fazendo, portanto, um ângulo positivo com ele, em cada ponto de interseção. Nos exercícios abaixo, vamos verificar que o conjunto Z é uma variedade suave unidimensional nesse caso. Vamos também justificar a Equação (4.2.1) e depois aplicá-la às esferas n-dimensionais.

Exercícios 4.2.1. a) Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função suave para a qual o conjunto $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ é não vazio e não contém nenhuns pontos críticos de F. Mostre que Z é uma variedade suave unidimensional. *Dica:* Cartas coordenadas em Z podem ser construídas com ajuda do Teorema da Função Implícita. Consulte um livro sobre cálculo em várias variáveis ou a Wikipédia para refrescar a sua memória desse teorema.

b) Quando $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, como no item anterior, mostre que o espaço tangente a Z num ponto $(x, y) \in Z$ é perpendicular a $\nabla F(x, y)$, estabelecendo assim a Equação (4.2.1) no caso de $k = 2$.

c) Pense sobre como generalizar os resultados dos itens anteriores ao caso de k geral e descreva, com palavras ou com equações, quais modificações essa generalização introduz.

d) Realize a n-esfera S^n como o conjunto nível de zero Z de uma função suave F. Calcule ∇F.

e) Dado um ponto $p \in S^n$, obtenha uma descrição do espaço vetorial T_pS^n usando (4.2.1).

f) Mostre que T_pS^n é ortogonal ao vetor $\mathbf{p}$, ou seja, o vetor baseado em $\mathbf{0}$ e terminando em p.

Graças aos exercícios acima, temos uma descrição explícita dos espaços tangentes à n-esfera como subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^{n+1}$. Vamos agora usar essa descrição para introduzir uma métrica riemanniana em S^n – um "produto escalar em cada espaço tangente" – fazendo o mais óbvio possível, isto é, simplesmente restringindo o produto escalar em $\mathbb{R}^{n+1}$ aos espaços tangentes da esfera.

Definição 4.2.2. A *métrica riemanniana esférica* em S^n é definida pela fórmula

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \tag{4.2.2}$$

para cada $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pS^n$, onde os parênteses angulares no lado direito da igualdade referem-se ao produto escalar ordinário em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para tornar tudo isso mais concreto, consideremos agora o caso de $n = 3$, já que a 3-esfera é o nosso objeto principal de estudo. Ao olhar a Equação (4.2.2), seria talvez tentador dizer que "a métrica esférica de S^3 é a restrição da métrica euclidiana de $\mathbb{R}^4$", mas essa frase é correta só quando a palavra "métrica" é interpretada como "métrica riemanniana" e, como logo veremos, *é falsa* se entende "métrica" como "distância" em espaços métricos. Todavia, podemos definir um conceito de distância entre pontos em S^3 considerando caminhos, dentro de S^3, que nos levam de um ponto ao outro. Como já discutido na Página 166, o comprimento de uma curva suave $\gamma : [0,1] \to S^3$, na métrica riemanniana esférica da Definição 4.2.2, é dado pela equação

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\big(\gamma_1'(t)\big)^2 + \big(\gamma_2'(t)\big)^2 + \big(\gamma_3'(t)\big)^2 + \big(\gamma_4'(t)\big)^2}\, dt. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Deste modo, vamos definir a *distância* entre dois pontos $p, q \in S^3$ como o comprimento do caminho "mais curto" entre eles, ou seja

$$d(p,q) = \inf\{\mathrm{L}(\gamma) : \gamma(0) = p,\ \gamma(1) = q,\ \gamma : [0,1] \to S^3 \text{ suave}\}. \tag{4.2.4}$$

Na seção seguinte, vamos mostrar que $d(p,q)$ é uma métrica, no sentido de espaços métricos, esclarecendo assim que não mentimos ao chamarmos d de "distância".

4.2.1 Distância riemanniana

Na Equação (4.2.4), definimos a "distância" d entre dois pontos na 3-esfera S^3. Como é claro da fórmula, essa noção faz sentido em cada variedade riemanniana conexa M, equipada com uma métrica riemanniana $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in M}$. Para que as coisas fiquem fáceis e concretas, vamos continuar a trabalhar no caso de S^3, mas sugerimos que a leitora mais avançada faça essas generalizações na sua cabeça ao ler o texto. Como a métrica riemanniana na 3-esfera foi definida pela restrição do produto escalar em $\mathbb{R}^4$, talvez a generalização mais acessível seja as variedades suaves, compactas, conexas, *localmente isometricamente mergulhadas* dentro de $\mathbb{R}^n$. Uma variedade riemanniana $M \subset \mathbb{R}^n$, de dimensão $k \leqslant n$, é localmente isometricamente mergulhada em $\mathbb{R}^n$ se M é suavemente mergulhada em $\mathbb{R}^n$ (veja a Página 128) e se a métrica riemanniana de M é obtida pela restrição do produto escalar em $\mathbb{R}^n$ aos espaços tangentes a M, como é o caso das esferas $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Em geral, a definição de distância $d(p, q)$ da Equação (4.2.4) é muito complicada: ela necessita que consideremos o conjunto, provavelmente extremamente infinito, de todos os caminhos suaves entre p e q, calculando os comprimentos de todos esses caminhos e, finalmente, tomando o ínfimo do conjunto dos comprimentos. Obviamente, é impossível fazer isso na prática, portanto vamos elaborar, na seção seguinte, uma abordagem mais agradável ao problema de calcular distâncias. Mesmo assim, a definição (4.2.4) apresenta certas vantagens do ponto de vista teórico – vejamos agora algumas delas.

Lembremo-nos primeiro de que um *espaço métrico* (X, d) é um par ordenado que consiste de um conjunto não vazio X e de uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ chamada de *distância*. A distância d tem de satisfazer as seguintes propriedades:

(i) $\forall x \in X,\ d(x, x) = 0$ – a distância de um ponto a si mesmo é zero;

(ii) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$ – a distância não depende da ordem dos dois pontos;

(iii) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ – a *desigualdade triangular*.

Como quase sempre acontece na teoria de espaços métricos, a desigualdade triangular é a propriedade mais difícil de estabelecer e vamos pedir para o leitor provar as propriedades i e ii acima.

Exercício 4.2.3. Mostre que a distância d definida na Equação (4.2.4) satisfaz as condições i e ii.

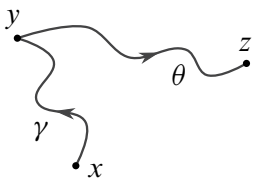


Figura 4.2.1: A prova da desigualdade triangular numa variedade riemanniana.

Como a definição (4.2.4) usa ínfimos, uma maneira direta de demonstrar a desigualdade triangular seria aplicarmos a propriedade $A \subset B \Longrightarrow \inf B \leqslant \inf A$, que vale para todos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$. Para essa ideia funcionar, B teria de ser o conjunto de comprimentos de caminhos de x a z, enquanto A teria de ser o conjunto de *somas* de comprimentos de caminhos de x a y com comprimentos de caminhos de y a z. Como podemos estabelecer a inclusão $A \subset B$? Cada número $a \in A$ é a soma $\mathrm{L}(\gamma) + \mathrm{L}(\theta)$ de comprimentos de dois caminhos suaves $\gamma, \theta : [0,1] \to S^3$, onde $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = \theta(0) = y$ e $\theta(1) = z$, como ilustrado na Figura 4.2.1. O nosso objetivo é mostrar que $a \in B$, ou seja, que existe um caminho suave β, indo de x a z, cujo comprimento é a. Mais precisamente, β deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\beta : [0,1] \to S^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad \beta(t) = \big(\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t), \beta_4(t)\big); \tag{4.2.5}$$

$$\beta_i \text{ é diferenciável para todo } i \in \{1, \ldots, 4\}; \tag{4.2.6}$$

$$\beta(0) = x,\ \beta(1) = z,\ \mathrm{L}(\beta) = \mathrm{L}(\gamma) + \mathrm{L}(\theta). \tag{4.2.7}$$

A ideia mais óbvia de construir β é como um caminho composto, que atravessa primeiro a rota do caminho γ e depois θ:

$$\beta^*(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{quando } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \theta(2t-1), & \text{quando } \frac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases} \tag{4.2.8}$$

A imagem do caminho β^* pode ser vista na Figura 4.2.1, como a união das imagens dos dois caminhos γ e θ. Entretanto, há um pequeno problema que a leitora provavelmente já observou – na linha (4.2.6) postulamos que as componentes de β sejam funções diferenciáveis e, de fato, a definição de $\mathrm{L}(\beta)$ envolve as derivadas delas. Infelizmente, o caminho composto mostrado na Figura 4.2.1 faz um canto pontiagudo no ponto y, enquanto a nossa intuição sugere que curvas com tais cantinhos não são suaves – a diferenciabilidade da curva β^* definida na Equação (4.2.8) não é garantida no ponto $t = \frac{1}{2}$. Por outro lado, vimos na Seção 3.2.3 que a nossa intuição de suavidade acaba sendo errada em muitas situações e, por isso, vamos continuar a investigar.

Nos exercícios abaixo, vamos resolver o problema do cantinho em y modificando a definição de β^* de tal modo que a curva resultante β tenha uma parametrização diferenciável e satisfaça todas as propriedades nas Equações (4.2.5) a (4.2.7). A ideia geral dessa construção é a seguinte: imagine conduzindo um carro ao longo da imagem de β^*, como na Figura 4.2.1. O caminho é dado, então existe uma só maneira de rodar o volante de modo que o carro fique na estrada, mas ao se aproximar ao ponto y com velocidade positiva, seria preciso rodar o volante com uma velocidade angular enorme. Como cada motorista habilitado sabe, não é possível ajustar a posição do volante infinitamente rápido: para manter controle sobre o veículo, é preciso desacelerar antes de curvas – quanto mais pronunciada a curva, menor a velocidade segura para percorrê-la. Essa lógica sugere que, para passar seguramente o cantinho – uma curva na qual é necessário mudar a direção ao longo de um espaço "infinitamente curto"– precisamos de reduzir a velocidade a zero. A curva β que vamos construir terá a mesma imagem em S^3 que a curva β^* – ela seguirá o mesmo trecho, que consiste de γ e de θ – e a única diferença no nosso estilo de condução será no uso do acelerador e do freio. Em geral, essa operação é chamada *reparametrização* da curva.

Exercícios 4.2.4. Considere a função real f definida pela fórmula

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{quando } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{quando } x < 0. \end{cases} \tag{4.2.9}$$

a) Explique exatamente por que f é contínua e diferenciável no ponto $x = 0$. Mostre que a derivada f' é contínua.

b) Utilize a função f para construir uma bijeção $s : [0, 1] \to [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- s é diferenciável e $s'(t) \geqslant 0$ para todo $0 < t < 1$.
- $s'(t) = 0$ somente no ponto $t = \frac{1}{2}$.

c) Em geral, considere uma curva suave $\gamma : [0, 1] \to M$ e uma *função de reparametrização*, ou seja, uma bijeção diferenciável $s : [0, 1] \to [0, 1]$. Mostre que a reparametrização não muda o comprimento da curva γ, isto é, $\mathrm{L}(\gamma) = \mathrm{L}(\gamma \circ s)$.

d) Considere a curva parametrizada $\beta : [0, 1] \to S^3$ definida como a composição $\beta(t) = \beta^*\big(s(t)\big)$. Supondo que as curvas γ e θ tenham parametrizações suaves (de classe C^∞), mostre que β satisfaz todas as propriedades nas Equações (4.2.5) a (4.2.7). *Dica:* Aplique os resultados dos itens anteriores.

e) A curva β construída acima tem uma parametrização diferenciável de derivada contínua (C^1), mas não necessariamente de classe C^k. Explique como modificar a função f de Equação (4.2.9) para produzir uma curva β cuja parametrização tem derivadas contínuas até a ordem k.

f) Use funções C^∞ de suporte compacto para construir uma versão de β de classe C^∞, ou seja, com derivadas contínuas de todas ordens.

g) Seja β a curva suave (de classe C^∞) construída no item anterior. Mostre que a imagem de β não é uma 1-variedade suavemente mergulhada em S^3.

h) Volte ao início e explique como os resultados dos exercícios acima implicam que a distância d definida na Equação (4.2.4) satisfaz a desigualdade triangular.

Como todos os argumentos acima funcionam em cada variedade riemanniana M, a distância riemanniana sempre torna M em um espaço métrico. Naturalmente, para escrever as fórmulas explicitamente, em coordenadas reais, temos de transportar tudo para $\mathbb{R}^n$ utilizando cartas coordenadas, que foram introduzidas na Definição 3.2.3.

Vejamos agora algumas propriedades mais concretas da distância riemanniana, desta vez trabalhando verdadeiramente na 3-esfera. A definição de $d(p,q)$ na Equação (4.2.4) implica que, se conhecemos um caminho explícito γ entre p e q, então a distância $d(p,q)$ tem de ser menor ou igual ao comprimento de γ: $d(p,q) \leqslant \mathrm{L}(\gamma)$. Nos exercícios abaixo, vamos utilizar isso para estimar algumas distâncias na 3-esfera.

Exercícios 4.2.5. a) Considere o caminho suave

$$\gamma : [0,1] \to S^3, \quad \gamma(t) = \big(0, 0, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\big). \tag{4.2.10}$$

Calcule o vetor-derivada $\gamma'(t)$ e use a fórmula (4.2.3) para encontrar o comprimento $\mathrm{L}(\gamma)$ de γ. Qual a distância entre $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$?

b) Sejam $N = (0,0,0,1)$ o polo norte e $S = (0,0,0,-1)$ o polo sul de S^3. Mostre que $d(N,S) \leqslant \pi$, construindo um caminho explicito de N a S com comprimento igual a π. *Sugestão:* Modifique a definição do caminho (4.2.10).

c) Considere o ponto $P = (0,1,0,0) \in S^3$. Usando funções trigonométricas, como nos itens anteriores, escreva a fórmula de um caminho γ entre P e o polo norte N. Calcule o comprimento de γ para obter um majorante de $d(P,N)$.

4.2.2 Isometrias das esferas

Para finalizar a nossa descrição da métrica riemanniana nas esferas S^n, vamos pensar um pouco sobre os grupos de isometrias $\mathrm{Isom}(S^n)$. O Teorema 4.1.7 diz que cada matriz ortogonal $A \in \mathrm{O}(n+1)$ determina uma isometria de $\mathbb{R}^{n+1}$, dada pela equação $\psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, e que, portanto, ψ fixa a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Sendo uma isometria euclidiana, ψ preserva o produto escalar de vetores em $\mathbb{R}^{n+1}$, que deu origem à métrica riemanniana de S^n. Como ψ leva a esfera S^n a si própria – veja a Equação (1.4.9) – a restrição de ψ à S^n é certamente uma isometria da geometria esférica! O teorema abaixo diz que todas as isometrias esféricas têm essa forma.

Teorema 4.2.6. $\mathrm{Isom}(S^n) \cong \mathrm{O}(n+1)$, $\mathrm{Isom}^+(S^n) \cong \mathrm{SO}(n+1)$.

Como poderíamos provar esse teorema? Já vimos que cada matriz ortogonal $A \in \mathrm{O}(n+1)$ determina um elemento $\psi \in \mathrm{Isom}(S^n)$; sabemos também que ψ preserva orientação se o somente se $A \in \mathrm{SO}(n+1) \subset \mathrm{O}(n+1)$. Mas como podemo-nos assegurar que *todas* as isometrias das esferas surgem como restrições de transformações ortogonais dos espaços euclidianos ambientes? Suponhamos que $\psi \in \mathrm{Isom}(S^n)$ e definamos a seguinte transformação de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\widetilde{\psi} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \widetilde{\psi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \cdot \psi\big(\|\mathbf{x}\|^{-1} \cdot \mathbf{x}\big), & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Quando $\mathbf{x} \in S^n$, ou seja, quando $\|\mathbf{x}\| = 1$, temos $\widetilde{\psi}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$, isto é, $\widetilde{\psi}$ prolonga ψ ao espaço euclidiano ambiente: $\psi = \widetilde{\psi}\big|_{S^n}$. Para concluir a prova do Teorema 4.2.6, basta que justifiquemos que $\widetilde{\psi}$ é uma transformação ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Seja p um ponto qualquer na n-esfera S^n. No Item f dos Exercícios 4.2.1, mostramos que o espaço tangente T_pS^n é um subespaço n-dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ perpendicular ao vetor $\mathbf{p}$ – o vetor baseado em $\mathbf{0}$ e terminando em p. Isso sugere que devemos considerar a *decomposição ortogonal* de $\mathbb{R}^{n+1}$ no subespaço gerado por $\mathbf{p}$ e o espaço tangente T_pS^n: é um exercício de álgebra linear mostrar que cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ pode ser decomposto, de modo único, como uma soma

$$\mathbf{v} = \rho\mathbf{p} + \mathbf{t}, \quad \mathbf{p} \perp \mathbf{t}, \tag{4.2.12}$$

onde o vetor $\mathbf{t}$ é tangente à esfera em p, ou seja, $\mathbf{t} \in T_pS^n$ e onde $\rho \in \mathbb{R}$. Essa decomposição é visualizada, no caso de $n = 2$, na Figura 4.2.2. Nos exercícios a seguir, vamos concluir a prova do Teorema 4.2.6, mostrando que a transformação $\widetilde{\psi}$, definida na Equação (4.2.11), é ortogonal.

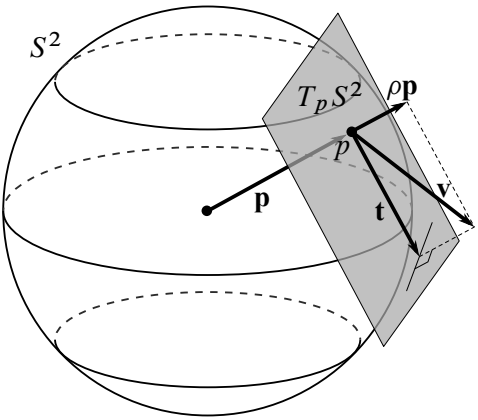


Figura 4.2.2: Dado um ponto $p \in S^2$, cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ pode ser decomposto, de modo único, como a soma de um vetor $\mathbf{t}$ tangente à esfera S^2 no ponto p e de um múltiplo $\rho\mathbf{p}$ do vetor $\mathbf{p}$ que vai da origem $\mathbf{0}$ ao ponto p:

$$\mathbf{v} = \rho\mathbf{p} + \mathbf{t}.$$

Exercícios 4.2.7. a) Para qualquer vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e para um ponto $p \in S^n$, considere a decomposição de $\mathbf{v}$ dada na Equação (4.2.12). Usando o Item f dos Exercícios 4.2.1, mostre que a derivada $D\widetilde{\psi}_p$ de $\widetilde{\psi}$ no ponto p preserva essa decomposição, ou seja, mostre que as imagens das duas partes da decomposição produzem uma nova decomposição ortogonal no ponto $\widetilde{\psi}(p)$. *Dica:* Para uma transformação diferenciável T de $\mathbb{R}^{n+1}$ em si mesmo, a imagem $DT_p(\mathbf{w})$ pode ser calculada como a derivada direcional,

$$DT_p(\mathbf{w}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(p + t\mathbf{w}).$$

b) Usando a hipótese que ψ é uma isometria de S^n e o resultado do item anterior, mostre que, para quaisquer vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$, vale a igualdade

$$\langle D\widetilde{\psi}_p(\mathbf{v}),\ D\widetilde{\psi}_p(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v},\ \mathbf{w}\rangle, \tag{4.2.13}$$

onde as derivadas são calculadas em qualquer ponto $p \in S^n$.

c) Mostre que, para cada $r > 0$, a transformação $\widetilde{\psi}$ leva a esfera $S(\mathbf{0}, r)$ de raio r, centrada na origem, a si mesma.

d) Para um ponto $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, denotemos por $r = \|\mathbf{p}\| > 0$ a distância euclidiana entre p e a origem. Generalize o resultado do Item f dos Exercícios 4.2.1 ao caso do espaço tangente $T_p\big(S(\mathbf{0}, r)\big)$ à esfera $S(\mathbf{0}, r)$ no ponto p.

e) Usando as notações do item anterior, generalize a decomposição ortogonal dada na Equação (4.2.12) ao caso de $p \in S(\mathbf{0}, r)$.

f) Generalize a Equação (4.2.13) ao caso de $p \in S(\mathbf{0}, r)$ para qualquer $r > 0$.

g) Verifique que a transformação $\widetilde{\psi}$ é diferenciável na origem. *Dica:* Em geral, para mostrar que uma aplicação $T : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é diferenciável na origem, é necessário encontrar uma matriz X de tamanho $(n+1) \times (n+1)$ tal que, para cada vetor unitário $\mathbf{u} \in S^n$ e para $\varepsilon > 0$, temos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T(\varepsilon \mathbf{u}) - T(\mathbf{0}) - \varepsilon X \mathbf{u}}{\varepsilon} = \mathbf{0}.$$

Para encontrar X, aplique o resultado do Item a dos Exercícios 4.1.6.

h) Use o item anterior para estender a igualdade (4.2.13) ao ponto $p = \mathbf{0}$.

i) Conclua dos Itens f e h acima que $\widetilde{\psi}$ é uma isometria euclidiana que fixa a origem e aplique o Teorema 4.1.7 para finalizar a prova do Teorema 4.2.6.

4.3 Descrição intrínseca da geometria esférica

Na seção anterior, consideramos a 3-esfera S^3 como um subconjunto de $\mathbb{R}^4$ e definimos a métrica riemanniana em S^3, restringindo o produto escalar euclidiano aos espaços tangentes da esfera. A vantagem principal dessa abordagem "extrínseca" é que ela nos permite trabalhar em coordenadas explícitas e que tudo se baseia no cálculo em várias variáveis, uma disciplina que todos provavelmente estudamos em um passado mais ou menos distante. Assim, as nossas definições formais de variedades suaves e de métricas riemannianas reduzem toda a geometria ao cálculo em $\mathbb{R}^n$, oferecendo uma certeza sólida de que não nos estamos enganando na nossa descrição desses espaços abstratos.

Ao mesmo tempo, essa redução da geometria ao cálculo é apenas isso: uma redução, escondendo as motivações e as imagens mentais que guiavam os matemáticos desenvolvendo essa fascinante teoria. Em particular, a abstração matemática da seção anterior escondeu talvez o significado intuitivo das noções de ângulo e distância. Por exemplo, quando usamos a geometria euclidiana no nosso dia-a-dia, conseguimos medir distâncias sem considerar o conjunto de todos os caminhos entre os dois pontos e sem tomar o ínfimo dos comprimentos deles. Ao invés disso, sabemos que a maneira certa de medir distâncias é ao longo de linhas retas, que *minimizam as distâncias*. A seguir, vamos definir as curvas *geodésicas*, que minimizam – pelo menos localmente – as distâncias numa variedade riemanniana. Depois, vamos descrever as linhas geodésicas na 3-esfera – que vão desempenhar

o papel das linhas retas na geometria euclidiana – e também os planos geodésicos, análogos aos planos em $\mathbb{R}^3$. Obviamente, todas essas construções baseiam-se, por fim, em cálculos e equações, inclusive equações diferenciais, que não discutiremos em detalhe. O leitor interessado pelas formulações precisas, detalhadas e gerais dessas ideias deve consultar o livro de M. P. do Carmo (1988) ou outras fontes externas.

O segundo objetivo desta seção é introduzir maneiras mais intuitivas, "intrínsecas", visuais e qualitativas, de percebermos a geometria da 3-esfera. Não é muito natural incluirmos em todos os nossos cálculos o espaço inteiro $\mathbb{R}^4$, no qual a 3-esfera S^3 é localmente isometricamente mergulhada. Se vivêssemos dentro da 3-esfera, ela seria todo nosso universo e não teríamos nenhum conceito do $\mathbb{R}^4$ "ambiente", exatamente como, na vida nossa quotidiana, também não percebemos o nosso espaço 3-dimensional como um subconjunto de um espaço de dimensão superior.[3] Já vimos uma possível maneira de estudar S^3 sem referência ao espaço ambiente: no Teorema 2.3.4, identificamos S^3 com o grupo matricial de Lie SU(2). Porém, não dissemos nada sobre como seria viver e medir ângulos e distâncias em SU(2) ou S^3.

4.3.1 Geodésicas na esfera

Para começar, lembremo-nos dos Exercícios 4.2.4, onde analisamos *reparametrizações* de curvas suaves numa variedade riemanniana. Suponhamos que $\gamma : [0,1] \to S^3$ é uma curva suave com a propriedade adicional que o vetor tangente $\gamma'(t)$ é diferente de zero, para cada $t \in (0,1)$. Como consequência, o comprimento $\mathrm{L}(\gamma)$ da curva é positivo – na verdade cada pedaço $\gamma\big([t_1,t_2]\big) \subset S^3$, para quaisquer $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$, tem um comprimento positivo.

Exercício 4.3.1. Justifique a última afirmação.

A reparametrização mais útil de todas, pelo menos em geometria diferencial, usa o comprimento parcial da curva – a distância ao longo curva até ao presente momento – como o parâmetro ele próprio. Em outras palavras, vamos postular que o parâmetro real da curva continuamente meça o comprimento ao longo dela até o ponto em que estamos.

Definição 4.3.2. Seja M uma variedade riemanniana qualquer. Com as notações introduzidas acima e com $L = \mathrm{L}(\gamma) > 0$, a *parametrização pelo comprimento de*

[3] A rejeição da teoria de cordas por uma grande parte dos físicos modernos deve-se, pelo menos parcialmente, a esse fato.

arco da curva γ é a parametrização suave

$$\widetilde{\gamma} : [0, L] \to M, \quad \widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)),$$

onde $t = t(s)$ é a única função diferenciável $t : [0, L] \to [0, 1]$ para a qual o comprimento do pedaço $\widetilde{\gamma}\big([0, b]\big)$ é igual a b, para todo $b \in [0, L]$.

Exercícios 4.3.3. a) Mostre que uma curva $\widetilde{\gamma} : [0, L] \to M$ é parametrizada pelo comprimento de arco se e somente se o seu vetor tangente satisfaz $\|\widetilde{\gamma}'(s)\| \equiv 1$.

b) Conclua, do ponto anterior, que a parametrização pelo comprimento de arco é única, desde que ela exista.

c) Encontre a parametrização pelo comprimento de arco da curva γ definida na Equação (4.2.10).

d) Pense como você mostraria que cada curva $\gamma : [0, 1] \to M$, satisfazendo $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in (0, 1)$, admite uma parametrização pelo comprimento de arco. *Sugestão:* Imagine visualmente como construir a função $t = t(s)$.

e) Explique porque a hipótese $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ é necessária e dê um exemplo de uma curva suave que não tenha uma parametrização pelo comprimento de arco.

Vamos agora usar curvas parametrizadas pelo comprimento de arco para definir linhas *geodésicas*, ou seja, curvas que minimizam localmente a distância entre pontos. No caso da geometria euclidiana, as geodésicas são, claro, linhas retas ou, mais precisamente, segmentos de retas. Entretanto, como exatamente sabemos que um segmento de reta constitui o caminho mais curto entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$ – o caminho tão "obviamente" mais direto entre eles, que até a palavra di-*reto* contém essa informação? Uma possível estratégia de elaborar uma resposta matematicamente rigorosa é analisarmos os possíveis pequenos desvios do caminho da linha reta. Essa abordagem pertence à área da matemática chamada *cálculo de variações*, e baseia-se na ideia de considerar o comprimento como uma função da curva: $\gamma \mapsto \mathrm{L}(\gamma)$. O domínio dessa função é um "espaço de curvas", uma "variedade de dimensão infinita", que pode ser realizada na prática como um subconjunto de um espaço de Fréchet – um espaço vetorial topológico, no qual a topologia é imposta por uma família enumerável de seminormas. Espaços de Fréchet são um assunto importante em análise funcional, mas infelizmente discuti-los aqui nos afastaria demais do nosso tema de geometria riemanniana. Vamos então mencionar apenas o seguinte: os espaços de Fréchet são metrizáveis e, por isso, podemos tomar limites neles como em qualquer espaço métrico – desse modo, a

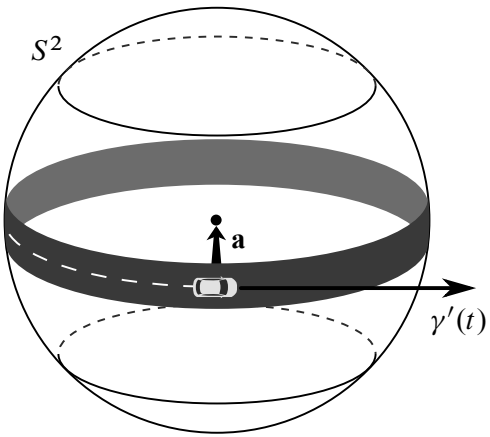


Figura 4.3.1: Um carro atravessa uma linha geodésica na 2-esfera S^2 localmente isometricamente mergulhada dentro de $\mathbb{R}^3$. Se a geodésica é parametrizada pelo comprimento de arco, como $t \mapsto \gamma(t)$, e a variável t representa o tempo, então a velocidade $\gamma'(t)$ é um vetor de comprimento constante, igual a 1, em cada ponto da trajetória. A aceleração $\mathbf{a} = \gamma''(t)$ é devida somente à forma geométrica da esfera, e não a quaisquer ações do motorista, que mantém rapidez constante e nunca roda o volante.

derivada é definida como "o limite, quando $h \to 0$, …", da maneira usual. Para que γ seja o mínimo de L, γ tem de ser um ponto crítico da função L, ou seja, um zero da derivada de L no espaço de Fréchet.

Uma maneira mais simples – mas talvez menos intuitiva – de descrever as linhas geodésicas é por meio de suas propriedades cinemáticas. Suponhamos que temos uma curva γ que se comporta como uma "linha reta generalizada": o que "experimenta" um veículo viajando ao longo dela? Podemos imaginar que a curva é parametrizada pelo comprimento de arco, e que o parâmetro $t \in [0, L]$ também representa o tempo, ou seja, $\gamma(t)$ é a posição do veículo no instante t. Assim, usando o Item a dos Exercícios 4.3.3, vemos que a "rapidez" do veículo tem de se manter igual a 1 todo o tempo, mas isso não implica que a *velocidade*, entendida como o vetor tangente $\gamma'(t)$, seja constante. Como um exemplo mais concreto, vamos pensar na superfície da Terra, considerada como a 2-esfera S^2, localmente isometricamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$. Na Figura 4.3.1, vemos um carro que viaja ao longo de uma linha geodésica em S^2 – um círculo máximo (como veremos a seguir), nesse caso o equador. Da perspetiva do motorista, a estrada parece perfeitamente reta e não é preciso sequer segurar o volante: com um carro anfíbio, a leitora pode começar em Macapá em direção a leste, dormir e acordar vendo Port-Gentil, no Gabão, à direita; almoçar em Mbandaka, na República Democrática do Congo; tomar um banho no Lago Victoria, em Kampala, Uganda; ver a paisagem do Quênia e da Somália; depois ver muito do Oceano Índico até passar pela Ilhas

Maldivas; passar pela ilha de Sumatra, na Indonésia; ver em seguida Malaca e depois Singapura à esquerda; passar pela ilha de Bornéu e várias outras ilhas da Indonésia; tocar a ponta norte de Papua, ainda na Indonésia; depois passar vários dias dormindo e acordando no Oceano Pacífico até chegar às Ilhas Galápagos e, se estiver em alta velocidade, quase cair dentro da cratera do vulcão Wolf na Ilha Isabela; depois chegar ao Equador continental; ver Quito à sua direita; passar pelo sul da Colômbia; entrar na Amazônia brasileira e finalmente voltar a Macapá. Tudo isso sem jamais encostar no volante.

Mesmo assim, do ponto de vista do espaço ambiente $\mathbb{R}^3$, a trajetória do carro é curva, porque o vetor velocidade, apesar de ter comprimento constante, continua a girar ao redor do eixo do planeta. Do ponto de vista "ambiente", a aceleração $\mathbf{a} = \gamma''(t)$ do carro é um vetor que sempre aponta na direção do centro da Terra, como mostra a figura. Essa aceleração, no entanto, não é perceptível pelo motorista porque ela tem direção ortogonal à superfície do terreno e o carro não tem a liberdade de viajar nessa direção. Nesse sentido, a "aceleração" é apenas uma ilusão, proveniente da forma geométrica da esfera dentro de $\mathbb{R}^3$, mas não relacionada à esfera em si – vamos, então, a partir de agora, desconsiderá-la e fazer a seguinte definição.

Definição 4.3.4. Seja M uma variedade riemanniana, localmente isometricamente mergulhada em $\mathbb{R}^n$, e seja γ uma curva suave dentro de M, parametrizada pelo comprimento de arco. Dizemos que γ é uma *geodésica* se a aceleração $\gamma''(t)$, considerada como um vetor em $\mathbb{R}^n$, é perpendicular ao espaço tangente $T_{\gamma(t)}M$, para cada t.

Podemos também exprimir essa propriedade em termos de equações diferenciais: se γ é uma curva suave em M, então γ é uma geodésica, parametrizada pelo comprimento de arco, precisamente quando

$$\begin{cases} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \equiv 1, \\ \quad \langle \gamma''(t), \mathbf{t} \rangle \equiv 0, \quad \text{para todo } \mathbf{t} \in T_{\gamma(t)}M. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Graças aos teoremas sobre a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, sabemos que geodésicas existem e são únicas, dadas certas "condições iniciais". Nesse caso, as condições iniciais consistem de um ponto da variedade M, do qual a geodésica sai, e de um vetor tangente nesse ponto, de norma 1, que determina a direção inicial da geodésica. Mais precisamente, para cada ponto $p \in M$ e cada vetor tangente $\mathbf{v} \in T_pM$ de norma 1, existem um número $\varepsilon > 0$ e uma única curva geodésica $\gamma : [0, \varepsilon] \to M$, parametrizada pelo

comprimento de arco, satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Na verdade, no caso de variedades metricamente completas e, em particular, variedades compactas, não precisamos nos preocupar com o número ε porque cada geodésica pode ser prolongada sem limite em ambas as direções, isto é, as equações (4.3.1) têm uma solução $\gamma : \mathbb{R} \to M$, sujeita às condições inciais $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

A nossa descrição cinemática de curvas geodésicas, como as "curvas de movimento sem aceleração", é uma boa analogia com as linhas retas em $\mathbb{R}^n$, mas não explica porque as curvas geodésicas minimizam, pelo menos localmente, distâncias na variedade. Em geral, esse é um teorema bastante avançado, e não temos aqui as ferramentas necessárias para estabelecê-lo. Vamos, entretanto, mencionar em breve os principais atores nessa estória. Na Seção 2.4.1, introduzimos a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{SU}(2)$. Vamos tratar $\mathrm{SU}(2)$ como o grupo de quatérnios unitários, ou seja, a esfera S^3, e vamos identificar $\mathfrak{su}(2)$ com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ de coordenadas (u, v, w) introduzidas na Equação (2.4.1). Desse modo, podemos pensar na aplicação exponencial como numa transformação $\exp : \mathbb{R}^3 \to S^3$, que tem a curiosa propriedade de levar subespaços unidimensionais de $\mathbb{R}^3$ a geodésicas em S^3 – veja em particular Item d dos Exercícios 2.4.10. Curiosamente, é possível construir uma *aplicação exponencial* $\exp : T_pM \to M$ em cada variedade riemanniana M. Essa aplicação também leva subespaços unidimensionais de T_pM a geodésicas que saem de p. Mais precisamente, cada vetor tangente $\mathbf{w} \in T_pM$ pode ser escrito como $\mathbf{w} = c\mathbf{v}$ para um vetor unitário $\mathbf{v}$ e um escalar $c \geqslant 0$, sendo assim $\exp(\mathbf{w})$ o ponto de M atingido ao viajarmos a distância c ao longo da única geodésica que sai de p na direção de $\mathbf{v}$. Depois de se estabelecer certas propriedades da aplicação exponencial – incluindo o "Lema de Gauss" – é possível, finalmente, mostrar que curvas geodésicas minimizam localmente as distâncias entre dois pontos.

No caso da 2-esfera S^2, as linhas geodésicas são os círculos máximos, fato que é usado por navegadores e linhas aéreas para minimizar a distância e, consequentemente, reduzir os custos com combustível. Vamos agora ver que a situação é a mesma em todas as esferas: as geodésicas nelas são exatamente os círculos máximos, em qualquer dimensão.

Teorema 4.3.5. *Para qualquer $n \geqslant 1$, as geodésicas em S^n são exatamente os círculos máximos.*

Para demonstrar o teorema, vamos primeiro observar que isometrias de S^n levam geodésicas a outras geodésicas, porque elas preservam toda a geometria. Achamos uma boa ideia que o leitor resolva o seguinte exercício, verificando que não mentimos aqui.

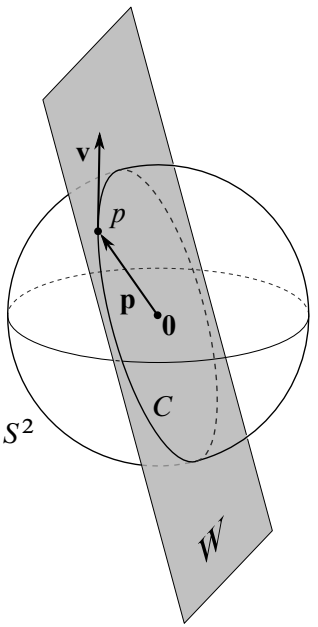


Figura 4.3.2: Construção do círculo C a partir de um ponto p na esfera e de um vetor unitário $\mathbf{v}$, tangente à esfera no ponto p. O círculo C tem a propriedade de passar por p com vetor tangente $\mathbf{v}$, e foi definido como a interseção da esfera com o plano W. O plano W é um subespaço linear bidimensional gerado pelos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{p}$, que sempre são linearmente independentes.

Exercício 4.3.6. Suponhamos que $\psi \in \mathrm{Isom}(S^n)$ é uma isometria e que $\gamma : \mathbb{R} \to S^n$ é uma curva geodésica em S^n, parametrizada pelo comprimento de arco. Mostre que a curva $\psi \circ \gamma : \mathbb{R} \to S^n$ também é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco.

Estamos agora prontos para provar o Teorema 4.3.5, cuja ideia geral é a seguinte. Vamos começar com qualquer geodésica γ dentro da n-esfera e construir uma isometria ψ que preserva essa geodésica, ou seja, satisfaz $\psi(\gamma) = \gamma$. Essa última igualdade será fácil de estabelecer, porque bastará verificarmos que ψ preserva as condições iniciais da equação diferencial (4.3.1), e a unicidade de soluções fará o resto. No último passo da prova, vamos mostrar que a única curva fixada pela isometria ψ é um círculo e vamos concluir, assim, que γ tem de ser esse círculo.

Demonstração do Teorema 4.3.5. Como sempre, vamos tratar a n-esfera S^n como a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para cada ponto $p \in S^n$ e cada vetor unitário $\mathbf{v}$ tangente nesse ponto, existe uma única geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to S^n$ que passa por p na direção de $\mathbf{v}$ ao tempo $t = 0$, ou seja, que satisfaz

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = \mathbf{v} \in T_p S^n. \tag{4.3.2}$$

A nossa tarefa é mostrar que γ parametriza um círculo máximo.

Vamos denotar por $\mathbf{p}$ o vetor baseado na origem e terminando em p – em outras palavras, o vetor $\mathbf{p}$ tem as mesmas coordenadas que o ponto p. Como mostramos no Item f dos Exercícios 4.2.1, o vetor $\mathbf{p}$ é perpendicular ao espaço tangente T_pS^n, que contém o vetor $\mathbf{v}$. Por isso, os vetores unitários $\mathbf{p}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais e, consequentemente, linearmente independentes. O espaço bidimensional gerado por eles, $W = \text{span}\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$, é, geometricamente, um plano que passa pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$ e corta a n-esfera ao longo de um círculo máximo $C = W \cap S^n$. Em particular, o ponto p pertence ao círculo C, enquanto o vetor $\mathbf{v}$ é tangente a C em p, como mostrado na Figura 4.3.2 no caso de $n = 2$.

A geodésica γ é completamente determinada pelas suas condições iniciais (4.3.2), então nosso objetivo agora é mostrar que γ é de fato uma parametrização do círculo C, que também passa por p com vetor tangente $\mathbf{v}$. Para esse fim, vamos considerar a isometria $\psi \in \text{Isom}(S^n)$, definida como a *reflexão no plano* W. Explicitamente, se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ é um vetor qualquer, então $\mathbf{x}$ admite uma única decomposição ortogonal $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{y}$, onde $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{y}$ é ortogonal a W. Nessa notação, $\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{w} + \mathbf{y}) = \mathbf{w} - \mathbf{y}$. Como ψ é uma isometria de $\mathbb{R}^{n+1}$ fixando a origem, temos $\psi \in \text{O}(n+1)$ e, graças ao Teorema 4.2.6, $\psi \in \text{Isom}(S^n)$. Em particular, ψ leva a geodésica γ a uma outra curva geodésica $\psi(\gamma)$. Ao mesmo tempo, ψ fixa o plano W ponto a ponto, então valem as igualdades $\psi(p) = p$ e $D\psi_p(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, implicando que a geodésica $\psi(\gamma)$ também passa por p na direção do vetor tangente $\mathbf{v}$, ou seja, que $\psi(\gamma)$ satisfaz as mesmas condições iniciais (4.3.2) que a curva original γ. Pela unicidade de soluções de equações diferenciais, temos de fato $\psi(\gamma) = \gamma$, ou seja, $\psi\big(\gamma(t)\big) = \gamma(t)$ para todo t. Em outras palavras, o ponto $\gamma(t)$ sempre pertence ao conjunto de pontos de $\mathbb{R}^{n+1}$ *fixados* pela transformação ψ, isto é, o plano W. Por isso, γ toma valores em W, isto é, γ parametriza o círculo $C = W \cap S^n$. □

Dado que as curvas geodésicas desempenham o papel de linhas retas da geometria euclidiana, podemos continuar com essa linha de raciocínio e nos perguntar como definir superfícies análogas aos planos euclidianos? A definição usual, que usaremos aqui também, é baseada na seguinte propriedade dos planos em $\mathbb{R}^n$: uma vez que um plano contém um segmento de reta, então esse plano contém toda a reta determinada pelo segmento.

Definição 4.3.7. Seja M uma variedade riemanniana. Uma superfície F suavemente mergulhada em M é chamada *totalmente geodésica* se, para cada ponto $p \in F$ e para cada vetor unitário tangente à superfície $\mathbf{v} \in T_pF$, a (única) geodésica $\gamma = \gamma_{p,\mathbf{v}}$, que passa por p na direção de $\mathbf{v}$, está totalmente contida em F.

Uma parte importante da definição acima é que F deve ser uma *superfície*, ou seja, uma variedade conexa de dimensão 2. Mesmo assim, podemos definir, mais geralmente, subvariedades suaves totalmente geodésicas de qualquer dimensão.

No caso específico das esferas S^n, podemos construir uma geodésica C a partir de um ponto p e um vetor tangente $\mathbf{v} \in T_pS^n$, como visualizado na Figura 4.3.2. Na verdade, o vetor $\mathbf{v}$ gera um subespaço unidimensional de T_pS^n, o espaço T_pC, tangente ao círculo máximo (uma 1-variedade) mergulhado suavemente em S^n. De maneira análoga, um subespaço bidimensional V_2 de T_pS^n determina uma esfera bidimensional em S^n – uma *esfera máxima*. Por construção, essa esfera bidimensional contém círculos máximos em todas suas direções tangentes, sendo portanto, a esfera bidimensional, de raio 1, centrada na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$: essas são as superfícies totalmente geodésicas dentro da n-esfera unitária S^n. No exercício abaixo, vamos estabelecer uma versão geral dessa construção.

Exercício 4.3.8. Tratando a n-esfera S^n como a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$, considere um ponto $p \in S^n$ e um subespaço vetorial k-dimensional V_k de T_pS^n, onde $1 \leqslant k \leqslant n$. Mostre que existe uma única k-esfera de raio 1, contida dentro de S^n, que passa pelo ponto p e cujo espaço tangente é V_k. *Sugestão:* Generalize a construção do círculo C da Figura 4.3.2.

4.3.2 Geometria esférica sintética

A seção anterior tem um papel similar ao da parte teórica de um curso de paraquedismo: nela estabelecemos o sentido "esférico" das palavras comumente usadas em geometria. Mas chegou a hora de treinar de verdade, fazendo saltos dentro da 3-esfera. Além do paraquedas dos Capítulos 1 a 3, incluímos a Tabela 4.3.1, essencialmente um pequeno dicionário de significados esféricos dos conceitos básicos. Para definir objetos geométricos mais complicados, podemos aplicar esse dicionário e traduzir as definições euclidianas para a língua esférica.

Por exemplo, na geometria euclidiana, define-se o triângulo como "uma região do plano limitada por três segmentos de retas". Usando o dicionário da Tabela 4.3.1, um *triângulo esférico* é uma região de uma *esfera máxima*, limitada por três *arcos de círculos máximos*. A imagem esquerda da Figura 4.3.3 mostra um triângulo esférico exemplar.

Com o paraquedas nas costas e toda a preparação teórica, convidamos agora a leitora para dar o primeiro salto para dentro da 3-esfera e resolver os seguintes exercícios.

Noção geral	**Nome euclidiano**	**Nome esférico**
3-variedade simétrica	$\mathbb{R}^3$	S^3
ponto	ponto	ponto
geodésica	linha reta	círculo máximo
superfície totalmente geodésica	plano	esfera máxima bidimensional
métrica riemanniana	produto escalar	métrica esférica
distância riemanniana	distância euclidiana	distância esférica
n-variedade simétrica	$\mathbb{R}^n$	S^n
subvariedade k-dimensional totalmente geodésica	hiperplano k-dimensional	esfera máxima k-dimensional

Tabela 4.3.1: Um dicionário que relaciona as noções mais básicas da geometria euclidiana àquelas da geometria esférica.

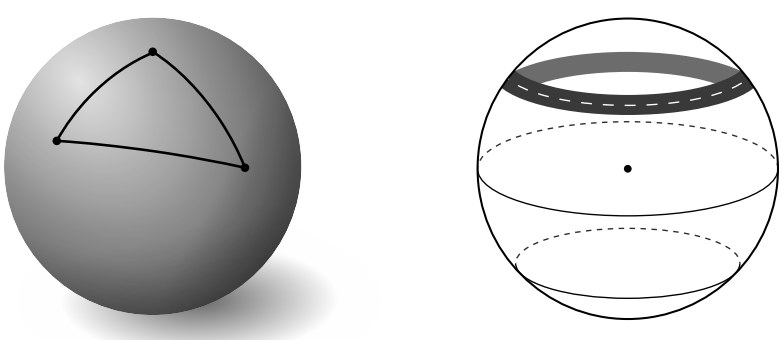


Figura 4.3.3: **Esquerda:** Um triângulo esférico é um pedaço da 2-esfera limitado por três arcos de círculos máximos. **Direita:** Uma estrada na direção oeste-leste.

Exercícios 4.3.9. a) A imagem direita da Figura 4.3.3 mostra uma estrada indo na direção oeste-leste, ou seja, ao longo de um paralelo de latitude. Imagine-se conduzindo um carro por essa estrada e descreva a posição do volante durante a viagem.

b) Considere, na 2-esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, os três pontos: $X = (1,0,0)$, $Y = (0,1,0)$, $Z = (0,0,1)$. Calcule os ângulos do triângulo (esférico!) XYZ.

c) Encontre a área esférica do triângulo XYZ do item anterior.

d) Vamos agora considerar *discos esféricos* dentro da 2-esfera S^2. Dado um ponto $A \in S^2$ e um número real $r \in (0, \pi)$, o disco esférico centrado em A, de raio r, é o conjunto de todos os pontos da 2-esfera que ficam à distância (esférica!) menor ou igual a r do ponto A:

$$D(A,r) = \{x \in S^2 : d_{S^2}(A,x) \leqslant r\}. \tag{4.3.3}$$

Mostre que, para quaisquer dois pontos A, $B \in S^2$, os discos $D(A,r)$ e $D(B,r)$ são congruentes.

e) A área de um disco euclidiano de raio r é, claro, πr^2. Decida se a área do disco esférico $D(A,r)$, definido na Equação (4.3.3) acima, é maior ou menor de πr^2 e por quê.

f) Substitua S^3 por S^2 na Equação (4.3.3) e compare o volume da *bola esférica* $D(A,r) \subset S^3$ com o volume duma bola euclidiana do mesmo raio.

g) No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, para cada plano Π e qualquer ângulo α, existe uma reta que faz o ângulo α com Π. Use o dicionário da Tabela 4.3.1 para traduzir essa afirmação para a língua esférica e mostre que a propriedade traduzida vale também em S^3.

h) No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, para cada plano Π e qualquer ângulo α, existe um outro plano que faz o ângulo α com Π. Como no item anterior, estabeleça a mesma propriedade em S^3. Descreva o conjunto de interseção entre dois planos em S^3 e compare a situação com o caso euclidiano.

i) Em $\mathbb{R}^3$, dois planos Π_1, Π_2 são *paralelos* quando $\Pi_1 = \Pi_2$ ou $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$. O que é que se pode dizer sobre planos esféricos paralelos dentro de S^3?

j) Um urso saiu de casa e passeou 1 km na direção sul, depois virou para esquerda e caminhou 1 km na direção leste, virou para esquerda mais uma vez e andou mais 1 km na direção norte. Ao fim desse passeio de 3 km, o urso chegou à sua casa. Qual a cor do urso?

Vamos agora pensar um pouco sobre as isometrias esféricas e analisar como elas transformam o espaço ao redor de um observador que vive dentro da 3-esfera. No Teorema 4.2.6, mostramos que as isometrias de S^3 que preservam a orientação são exatamente as transformações ortogonais do espaço ambiente $\mathbb{R}^4$ que preservam a orientação e que fixam a origem. Portanto, essas transformações correspondem aos elementos do grupo matricial SO(4). Uma maneira útil de pensar em SO(4) é por meio do Teorema 2.4.17, que nos diz, efetivamente, que todas as isometrias de S^3 podem ser obtidas por multiplicação simultânea, à direita e à esquerda, por quatérnios unitários. Na teoria, essa informação algébrica é tudo o que precisamos saber, mas achamos que a forma melhor, pelo menos em geometria, é ver e imaginar, e, por isso, queremos encorajar o leitor a fazer isso.

Pensemos primeiro sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, dentro do qual vamos escolher uma linha reta $\ell \subset \mathbb{R}^3$. Existem duas importantes famílias de isometrias euclidianas que preservam ℓ: as *rotações ao redor de* ℓ e as *translações ao longo de* ℓ. Embora tenhamos uma ideia intuitiva do que essas transformações fazem, precisamos de definições rigorosas, que possam depois ser traduzidas para a língua esférica. Uma possível descrição de uma rotação ao redor de ℓ é como uma isometria que preserva a orientação do espaço e que *fixa,* ponto a ponto, a linha ℓ. Ao contrário, as translações ao longo de ℓ não fixam ℓ em geral, mas elas *preservam* essa reta, ou seja, levam ℓ a si mesma. Além disso, as translações preservam também os planos que contêm ℓ, ou seja, se Π é um plano euclidiano tal que $\ell \subset \Pi$, então uma translação ao longo de ℓ leva o plano Π a si mesmo.

Utilizando o nosso dicionário da Tabela 4.3.1, podemos definir as *rotações esféricas* como as isometrias da 3-esfera que preservam a orientação e que fixam, ponto a ponto, um círculo máximo. Analogamente, as *translações esféricas* preservam: a orientação de S^3, um círculo máximo, e também cada esfera máxima bidimensional que contém esse círculo. Vejamos agora algumas das propriedades dessas transformações.

Exercícios 4.3.10. a) Considere o círculo $C = \{(\cos t, \operatorname{sen} t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$, um círculo máximo na esfera unitária $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Vamos orientar C na direção do crescimento do parâmetro t e considerar, para cada $b \in [0, 2\pi)$, a translação $\tau(C, b)$ ao longo de C pela distância b, no sentido da orientação de C. Dê uma descrição algébrica de $\tau(C, b)$, como uma matriz em SO(4) ou por meio

de multiplicação quaterniônica.

b) Justifique por que a translação $\tau(C, b)$ do ponto anterior é, ao mesmo tempo, uma rotação ao redor de uma outra geodésica C'. Encontre C'.

c) Generalize o resultado dos itens anteriores, mostrando que cada translação esférica ao longo de uma geodésica C é, simultaneamente, uma rotação ao redor de uma outra geodésica C'. Descreva, em geral, a relação entre C e C', sem se referir ao espaço ambiente $\mathbb{R}^4$.

4.4 Variedades geométricas

Como vimos na seção anterior, a geometria da 3-esfera S^3 possui várias propriedades bastante similares às da geometria euclidiana, mas há também diferenças importantes. Uma delas é que a soma de ângulos num triângulo esférico sempre ultrapassa π e, ao contrário do que acontece no mundo euclidiano, *depende da área do triângulo*. Outra diferença importante é que S^3 é um espaço topológico compacto ao contrário do $\mathbb{R}^3$.

Na Seção 3.2, estudamos $\mathcal{G}$-variedades – espaços topológicos com propriedades locais idênticas às de $\mathbb{R}^n$ – onde o pseudogrupo $\mathcal{G}$ determina quais propriedades estamos considerando. Por exemplo, se $\mathcal{G}$ é o pseudogrupo de difeomorfismos locais de $\mathbb{R}^n$, então uma $\mathcal{G}$-variedade é, precisamente, uma n-variedade *suave*. Se quiséssemos definir assim uma n-variedade *geométrica*, poderíamos tomar o pseudogrupo $\mathcal{G}$ de difeomorfismos que são, localmente (sobre cada componente conexa), isometrias euclidianas. Entretanto, ao escolhermos as isometrias euclidianas como elementos de $\mathcal{G}$, acabamos transportando a geometria *euclidiana* de $\mathbb{R}^n$ para a variedade. Por isso, para adaptar essa construção à geometria esférica, ou possivelmente a outras geometrias, é útil generalizar a Definição 3.2.3 um pouco, de modo que seja permitido usarmos um "espaço-modelo" diferente de $\mathbb{R}^n$, por exemplo S^n. No que segue, vamos denotar esse espaço-modelo por X e a variedade por ele modelada por M. Se a leitora sentir desconforto devido a esse nível de generalidade, pode pensar, mais concretamente, em termos dos exemplos fundamentais de $X = \mathbb{R}^3$ ou $X = S^3$.

Para começar, vamos definir uma isometria local – uma versão local da noção da isometria de uma variedade riemanniana.

Definição 4.4.1. Seja X uma variedade suave equipada com uma métrica riemanniana $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in X}$ e sejam $U, V \subset X$ dois conjuntos abertos em X. Um difeo-

morfismo $\psi : U \to V$ é chamado *uma isometria local* se a derivada $D\psi$ satisfaz

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \big\langle D\psi_p(\mathbf{v}), D\psi_p(\mathbf{w}) \big\rangle_{\psi(p)}$$

para cada ponto $p \in U$ e para quaisquer vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pX$.

O conjunto de todas isometrias locais da variedade riemanniana X, pelo resultado do Item b dos Exercícios 3.2.6, forma um pseudogrupo $\mathcal{G}$ em X, chamado, sem surpresa, o pseudogrupo de isometrias locais de X. Usando o pseudogrupo $\mathcal{G}$, podemos agora transplantar a geometria *local* de X a uma outra variedade M. Como explicamos no início deste capítulo, a geometria de uma variedade riemanniana geral depende de onde estamos na variedade, então esse processo de transportar a estrutura geométrica local dá melhores resultados quando X é uma variedade homogênea e isotrópica. Tais variedades têm muita simetria e, consequentemente, muitas isometrias locais.

Definição 4.4.2 (($X, \mathcal{G}$)-variedade)**.** Seja X uma variedade riemanniana e seja $\mathcal{G}$ o pseudogrupo de isometrias locais de X. Uma $(X, \mathcal{G})$-*variedade* é um par ordenado $(M, \mathcal{U})$ formado por um espaço topológico M, Hausdorff e com base enumerável, e um $(X, \mathcal{G})$-*atlas* $\mathcal{U}$,

$$\mathcal{U} = \{(\varphi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda},$$

onde Λ é um conjunto de índices. O $(X, \mathcal{G})$-*atlas* $\mathcal{U}$ é uma família de cartas coordenadas da forma $\varphi_\lambda : U_\lambda \to X$, onde cada φ_λ é um homeomorfismo sobre sua imagem e onde os domínios abertos U_λ cobrem todo M, ou seja, $M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Além disso, as cartas do atlas $\mathcal{U}$ têm de ser $\mathcal{G}$-compatíveis, isto é, para quaisquer duas cartas $(\varphi, U), (\psi, V) \in \mathcal{U}$, a troca de coordenadas

$$\varphi \circ \psi^{-1} \colon \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

é uma isometria local de X.

A definição acima pode ser ilustrada com a Figura 3.2.1, que já vimos no Capítulo 3, mas com X em vez de $\mathbb{R}^n$.

4.4.1 Exemplo euclidiano – o 3-toro

Vejamos agora um exemplo concreto duma $(X, \mathcal{G})$-variedade: o 3-toro "cúbico" T^3 (em analogia ao 2-toro "quadrado" T^2). Nesse exemplo, $X = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{G} = \mathcal{E}$, o pseudogrupo de isometrias locais *euclidianas*. O 3-toro já foi discutido, na Seção 3.1.3, onde escolhemos prestar atenção apenas a seus aspectos topológicos.

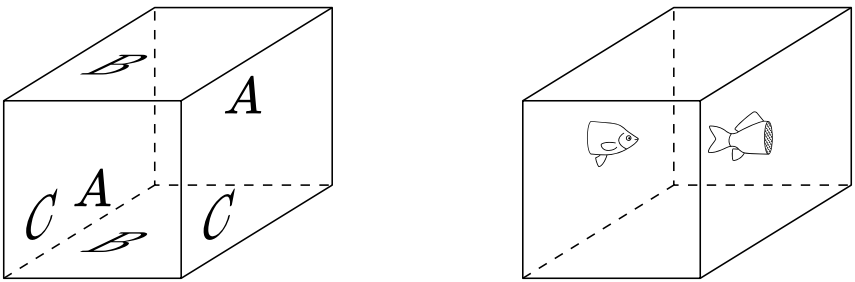


Figura 4.4.1: Esquerda: O 3-toro T^3 é uma 3-variedade obtida como um espaço quociente do cubo unitário em $\mathbb{R}^3$, onde as faces opostas são identificadas por meio de translações. Em outras palavras, cada ponto numa das faces marcadas A é identificado com o ponto correspondente noutra face A, de modo que T^3 contém só uma cópia de cada ponto em A, e o mesmo acontece com as faces B e C. **Direita:** Num 3-toro aquático, um peixe pode nadar livremente em todas as direções. Como o 3-toro é uma variedade sem bordo, o peixe nunca encontra qualquer "parede" ou qualquer outro obstáculo. O peixe na figura, em particular, é um peixe conexo (e está vivo).

Para construí-lo, começamos com o cubo unitário $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ e colamos faces opostas por meio de *translações euclidianas,* como mostrado na parte esquerda da Figura 4.4.1. O espaço quociente resultante – o 3-toro T^3 – é uma variedade fechada tridimensional, que não sabemos desenhar dentro de $\mathbb{R}^3$, mas que podemos analisar do ponto de vista de um peixe vivendo dentro dela, como mostra a parte direita da Figura 4.4.1. Um aquário na forma do 3-toro contém um volume finito de água, mas, ao contrário de um aquário tradicional, não tem paredes – peixes em T^3 podem nadar livremente em todas as direções, sem encontrar quaisquer obstáculos. E, curiosamente, a água não "cai", já que não há para *onde* cair: o 3-toro é um universo completo, que "se fecha sobre si mesmo".

Supondo que a água seja cristalina e o 3-toro não seja muito grande, se o peixe olhar para frente, ele poderá ver a sua própria cauda, como se fosse a cauda de um outro peixe logo à frente. Analogamente, olhando para direita o peixe vê seu próprio lado esquerdo e olhando para cima vê sua própria barriga. Assim, o peixe tem a impressão de estar dentro de um cardume infinito de peixes, com companheiros de ambos os lados, na frente e atrás, em cima e embaixo. Supondo que não faça perguntas aos colegas e nem tente se aproximar deles, o peixe viverá feliz para sempre, sentindo-se sempre acompanhado. Se, no entanto, resolver que gostaria de conhecer melhor seus companheiros e companheiras, não tardará a enlouquecer ao perceber que qualquer movimento que faça para se aproximar de qualquer dos

outros os faz se afastarem dele como o diabo da cruz.

Contudo, se a água em T^3 for turva ou se o aquário tórico for muito grande, o peixe não verá a própria cauda e perceberá apenas uma vizinhança de si mesmo. O peixe formará família, terá um filho matemático e uma filha física, e viverão em Aquópolis. O filho logo dirá que é provável que eles vivam dentro de um espaço infinito e que, como esse espaço tem comprimento, largura e altura, deve ser denotado por $\mathbb{R}^3$. A filha construirá um rádio de ondas curtas e começará a tentar entrar em contato com outros mundos e encontrar vidas extra-aquestres. Qual não será sua surpresa quando, depois de muitas tentativas, ao fazer modificações que tornam seu rádio mais potente, ela ouvirá, horas após enviar novos sinais, seu rádio chiar. Excitadíssima, ela continuará a enviar sinais na mesma direção e começará a analisar os sinais que recebe de volta. Perceberá que, curiosamente, são aparentemente iguais aos que ela própria envia, e que os recebe na direção exatamente oposta à qual envia os seus. Ela correrá para contar ao irmão e, juntos, eles pensarão que estão ficando loucos, ela tentando encontrar outras esferetas, e ele tentando descrever outras possíveis topologias de possíveis universos. E resolverão virar músicos.

Para verificar que T^3 é uma 3-*variedade euclidiana*, ou seja, uma $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E})$-variedade, temos de mostrar que cada ponto em T^3 possui uma vizinhança identificável com um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, de modo que todas as trocas de coordenadas sejam isometrias euclidianas locais. É fácil encontrar uma boa carta coordenada para o interior do cubo – de fato, todo o interior do cubo já é dado como um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, o cubo aberto $(0,1)^3$ ele próprio. Resta-nos então considerar somente pontos que tiveram origem no bordo do cubo e que foram colados a outros tais pontos. Como o leitor já sabe do Exercício 3.1.14, há três casos a serem considerados:

(i) Pontos no interior de uma face do cubo (um quadrado aberto),

(ii) Pontos no interior de uma aresta (um segmento aberto),

(iii) Os vértices do cubo.

Vamos denotar por $\sim$ a relação de equivalência da nossa colagem, de modo que $T^3 = [0,1]^3/\sim$. No caso i, devemos considerar um ponto $p \in T^3$ que é o resultado de colagem de dois pontos $p_1 \sim p_2$ nos interiores das faces opostas do cubo. Para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos construir bolas abertas $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^3$, de raio ε, centradas nos pontos p_1 e p_2 respectivamente, que não tocam outras faces do cubo, como mostrado na parte direita da Figura 4.4.2. A interseção das bolas com o cubo consiste de duas semibolas, mostradas na

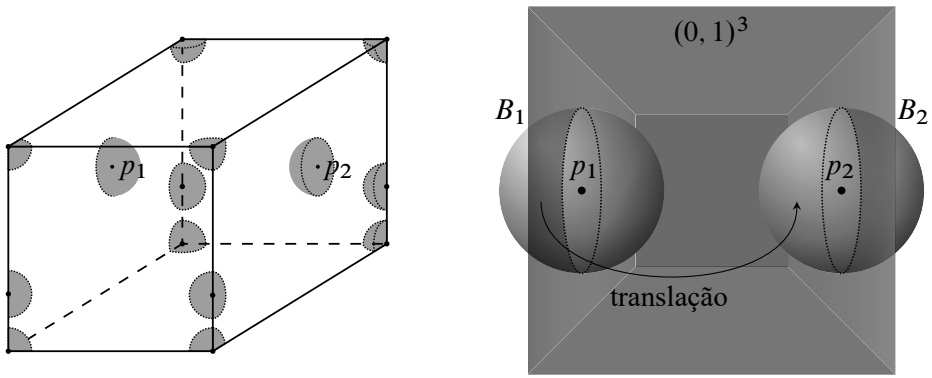


Figura 4.4.2: Esquerda: Para cada par $p_1 \sim p_2$ de pontos nos interiores das faces do cubo, que dão origem a um só ponto $p \in T^3$, podemos construir semibolas que se tornam uma bola aberta após a colagem. De forma análoga, pontos que resultam da identificação de interiores das arestas do cubo têm vizinhanças que podem ser montadas usando quatro pedaços – quatro quartos de uma bola – graças à Equação (4.4.1). Finalmente, o ponto que resulta da identificação dos vértices possui uma vizinhança feita de oito oitavos de uma bola euclidiana colados como os oito "quadrantes" ao redor da origem em $\mathbb{R}^3$. **Direita:** A troca de coordenadas é uma isometria local: a identidade sobre a semibola aberta $B_1 \cap (0,1)^3$ e uma translação euclidiana sobre a semibola aberta $B_1 \setminus [0,1]^3$.

parte esquerda da figura. Como a colagem das faces é feita por meio de isometrias, essas duas semibolas juntam-se perfeitamente, formando uma vizinhança aberta $V \subset T^3$ do ponto $p = [p_1]_\sim = [p_2]_\sim$. Seja U a imagem do cubo aberto $(0,1)^3$ em T^3, e consideremos a carta coordenada óbvia $\varphi : U \to (0,1)^3$. Para o aberto $V \subset T^3$, podemos usar a carta $\psi : V \to B_1 \subset \mathbb{R}^3$, que identifica V com a bola euclidiana B_1.

Com essas notações, a nossa tarefa é mostrar que a troca de coordenadas entre φ e ψ é uma isometria local. A carta coordenada φ leva interseção $U \cap V$ às duas semibolas abertas que formam a interseção $(0,1)^3 \cap (B_1 \cup B_2)$, ou seja, às duas semibolas dentro do cubo na parte direita da Figura 4.4.2. Ao mesmo tempo, a interseção $U \cap V$ é transformada por ψ nas duas metades da bola B_1 – a parte "esquerda" $B_1 \setminus [0,1]^3$ e a parte "direita" $B_1 \cap (0,1)^3$. Assim, a metade direita de B_1 acaba onde a queremos, mas a metade esquerda está fora do cubo e, por isso, precisa de ser movida, por uma translação, sobre a semibola $B_2 \cap (0,1)^3 \subset \varphi(U \cap V)$. Mais formalmente, a composição $\varphi \circ \psi^{-1}$ age como a translação $B_1 \setminus [0,1]^3 \to B_2 \cap (0,1)^3$ e, ao mesmo tempo, como a identidade sobre a semibola

aberta $B_1 \cap (0,1)^3$. Consequentemente, $\varphi \circ \psi^{-1}$ é uma isometria local, ou seja, um elemento de $\mathcal{E}$.

No caso ii, devemos construir vizinhanças abertas de pontos do 3-toro que resultam da colagem das arestas. Como mostrado no lado esquerdo da Figura 4.4.2, cada vizinhança em T^3 pode ser montada de quatro pedaços – quartos de uma bola euclidiana – que se combinam perfeitamente, formando uma bola inteira. Nesse caso, além da hipótese que a colagem é feita por meio de isometrias entre as faces, precisamos de nos referir ao fato que os ângulos entre as faces do cubo são retos. É por isso que os pedaços de bolas têm ângulos diedrais iguais a $\frac{\pi}{2}$ e, consequentemente, a soma de ângulos ao redor da aresta, após a colagem, é igual a

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi. \tag{4.4.1}$$

Como aconteceu no caso i, as trocas de coordenadas são isometrias euclidianas.

Finalmente, no caso iii, vemos que todos os vértices do cubo acabam sendo colados em um só ponto do 3-toro. Portanto, uma vizinhança desse ponto pode ser feita de oito oitavos de uma bola, de maneira também ilustrada na Figura 4.4.2. Neste caso, não precisamos nos preocupar com os ângulos, pois a igualdade (4.4.1) já foi verificada acima. Podemos, então, concluir que T^3 é uma 3-variedade euclidiana – uma $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E})$-variedade.

Exercício 4.4.3. a) Justifique por que as trocas de coordenadas são isometrias euclidianas no caso de vizinhanças de pontos que resultam da colagem das arestas do cubo.

b) Pense sobre as geodésicas em T^3 e dê exemplos delas.

c) Em vez do cubo unitário, podemos considerar o paralelepípedo

$$[0,a] \times [0,b] \times [0,c] \subset \mathbb{R}^3,$$

onde $a, b, c > 0$. O resultado dessa colagem é um 3-toro euclidiano $T^3_{(a,b,c)}$. Quais dos toros $T^3_{(a,b,c)}$ são isométricos?

d) Realize o toro $T^3_{(a,b,c)}$ do ponto anterior como o quociente de $\mathbb{R}^3$ pela ação de um subgrupo $\Gamma < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^3)$.

e) Após alguns dias, a peixe-física desistiu da carreira de música e voltou a fazer física e a interessar-se em descobrir a forma de seu universo. Que tipo de experimentos ela poderia fazer para entendê-lo melhor? Seu irmão, sem a parceira

de grupo, voltou a fazer matemática. Quais universos tridimensionais euclidianos ele poderia inventar para sugerir à irmã como possibilidades a serem testadas?

4.4.2 Colagem geométrica

Na construção do 3-toro euclidiano, apresentada acima, o passo mais complicado era mostrar que as trocas de coordenadas são isometrias locais. Essencialmente, essa propriedade foi consequência do fato que os lados do cubo são colados por meio de isometrias euclidianas, nesse caso translações. As trocas de coordenadas acabaram sendo restrições dessas isometrias euclidianas aos conjuntos abertos apropriados – por exemplo, a translação visualizada na parte direita da Figura 4.4.2 é uma restrição da translação de $\mathbb{R}^3$, que relaciona as duas faces do cubo marcadas C no lado esquerdo da Figura 4.4.1. Assim, o exemplo do 3-toro revela certos princípios gerais que governam a construção de variedades *geométricas* por colagem de poliedros. O aspectos topológicos de tais colagens já foram discutidos na Seção 3.3.1, e toda essa discussão continua a aplicar-se à nossa presente situação. Portanto, vamos agora centrar a nossa atenção nos aspectos geométricos, que são novos.

Para definir *poliedros geométricos,* lembremo-nos de que um poliedro em $\mathbb{R}^3$ é um conjunto compacto e conexo, de interior não vazio, limitado por um número finito de faces poligonais – pedaços de planos em $\mathbb{R}^3$. Vamos agora generalizar essa definição com ajuda do dicionário da Tabela 4.3.1, usando sua primeira coluna. Seja X uma 3-variedade riemanniana, que servirá como o espaço-modelo para $(X, \mathcal{G})$-variedades. Um subconjunto compacto e conexo $P \subset X$, de interior não vazio, é chamado um *poliedro em* X se P é limitado por um número finito de pedaços de subvariedades bidimensionais totalmente geodésicas na métrica riemanniana de X. Se s é uma aresta do poliedro P, então o *ângulo diedral* ao longo de s é o angulo entre as duas faces de P que se juntam em s. O ângulo diedral pode ser medido como o ângulo entre duas geodésicas, contidas nessas faces, que intersectam s perpendicularmente no mesmo ponto.

Generalizando o caso do 3-toro discutido na seção anterior, chegamos às condições que garantem a existência da estrutura de uma $(X, \mathcal{G})$-variedade no espaço quociente, que resulta da colagem de um poliedro $P \subset X$.

Condições 4.4.4. A colagem das faces de um poliedro $P \subset X$ resulte numa $(X, \mathcal{G})$-variedade, desde que se satisfaçam as seguintes condições:

(i) As identificações entre os pares de faces de P são restrições de isometrias locais, que preservam a orientação, definidas em certas vizinhanças abertas dessas faces.

(ii) O poliedro P satisfaz as *equações de colagem,* ou seja, a soma de ângulos diedrais nas arestas de P identificadas pela colagem é sempre igual a 2π.

(iii) A característica de Euler do espaço quociente é igual a zero.

A condição iii acima é uma das hipóteses do Teorema 3.3.12, a outra hipótese sendo que a colagem seja *boa*. No exercício abaixo, vamos verificar que cada colagem satisfazendo condição i é boa e, assim, o Teorema 3.3.12 vai garantir que o espaço quociente é uma variedade topológica, desde que a colagem satisfaça as Condições 4.4.4. Como é claro, todas as condições estão satisfeitas na nossa construção do 3-toro, com $X = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{G} = \mathcal{E}$, $P = [0,1]^3$.

Exercício 4.4.5. Prove a seguinte afirmação geral: quando uma colagem das faces de um poliedro P satisfaz a condição i acima, então os homeomorfismos do primeiro retorno induzem identidade nas arestas internas, ou seja, a colagem é boa. *Sugestão:* Pense sobre como as identificações de colagem agem nas arestas de P.

Na seção seguinte, veremos exemplos concretos de colagens esféricas, onde $X = S^3$ e $P \subset X$ é um poliedro esférico, mas, antes disso, vamos analisar a geometria local de uma $(X, \mathcal{G})$-variedade. Quando X é uma variedade homogênea e isotrópica, ou seja, "todos os pontos e todas as direções em X são os mesmos", então cada $(X, \mathcal{G})$-variedade M herda essa propriedade, mas apenas localmente. Cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança aberta $U \subset M$ e uma carta coordenada $\varphi : U \to X$, o que nos permite transportar a geometria local de X para U. Essa geometria local de X não depende de onde fica a imagem $\varphi(U)$, ou seja, ela não muda quando φ é substituído com uma composição $\psi \circ \varphi$, onde $\psi \in \mathrm{Isom}(X)$. Além disso, a geometria local de M é "a mesma" também em um outro sentido – ela não muda de ponto a ponto, como mostra o seguinte exercício.

Exercícios 4.4.6. Seja X uma variedade homogênea e isotrópica no sentido da Definição 4.1.3, e seja $\mathcal{G}$ o pseudogrupo de isometrias locais de X. Nos exercícios abaixo, supomos que M é uma $(X, \mathcal{G})$-variedade.

a) Mostre que, para quaisquer pontos $p, q \in M$, existem duas vizinhanças abertas $U, V \subset M$, com $p \in U$ e $q \in V$, entre as quais existe uma isometria local $\psi : U \to V$ satisfazendo $\psi(p) = q$.

b) Mostre que, para qualquer ponto $p \in M$ e para quaisquer vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$ de norma 1, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p e uma isometria local $\psi : U \to U$ tal que $\psi(p) = p$ e $D\psi_p(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

Definição 4.4.7. Uma variedade riemanniana M é chamada *localmente homogênea* se M tem a estrutura de uma $(X, \mathcal{G})$-variedade, para uma variedade X homogênea no sentido da Definição 4.1.3. Analogamente, se a variedade X é isotrópica, então cada $(X, \mathcal{G})$-variedade M é chamada *localmente isotrópica*.

Observação 4.4.8. É comum encontrar os termos "variedade homogênea" e "variedade isotrópica" sendo usados para se referir a variedades que chamamos aqui *localmente* homogêneas ou isotrópicas. As variedades que chamamos homogêneas e isotrópicas, no sentido da Definição 4.1.3, são frequentemente chamadas *variedades simétricas de Riemann* em outras obras.

4.5 Colagens esféricas

Nesta seção, vamos construir exemplos de $(X, \mathcal{G})$-variedades quando o espaço-modelo X é a 3-esfera S^3, com o pseudogrupo $\mathcal{G}$ igual ao pseudogrupo $\mathcal{S}$ de isometrias locais esféricas. As variedades resultantes, ou seja, as $(S^3, \mathcal{S})$-variedades, são chamadas *variedades esféricas*. Como a nossa ferramenta principal, vamos usar colagens de poliedros esféricos. Em particular, as propriedades da geometria esférica estabelecidas na Seção 4.3.2 vão nos ajudar na construção dos poliedros necessários para efetuar essas colagens.

Como a geometria local duma variedade esférica é a mesma que a geometria local da 3-esfera, um observador com visão limitada, como um peixe em água turva, pode não ser capaz de perceber a diferença entre a $(S^3, \mathcal{S})$-variedade ao seu redor e a 3-esfera S^3. Será que o nosso universo tem a forma de uma dessas variedades? Os astrofísicos não sabem a resposta, porque a nossa visão do universo tem similaridades com a visão dum peixe em água turva: o universo observável – a luz proveniente do qual teve tempo suficiente para atingir a Terra – pode constituir apenas uma pequena parte do universo inteiro. Nesta situação, um peixe-físico iria dizer que não faz sentido fazer essas perguntas, porque sem visão completa do aquário, não se pode verificar as respostas. Ao mesmo tempo, um peixe-matemático tentaria descrever alguns exemplos de *possíveis* formas de universos tridimensionais com geometria local esférica, sem precisar saber se de fato vive e nada em qualquer um deles.

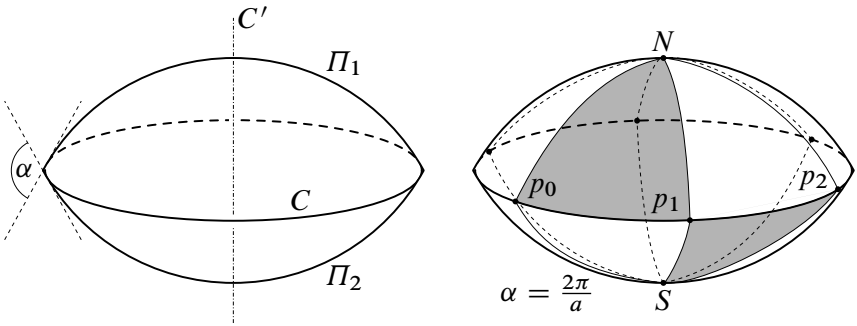


Figura 4.5.1: **Esquerda:** Uma lente esférica de ângulo α é uma parte da 3-esfera limitada por dois planos esféricos que se intersectam com o ângulo α. A imagem usa a projeção estereográfica, o que pode dificultar a percepção de que as faces da lente são na verdade hemisférios (semiplanos esféricos). **Direita:** A divisão do círculo equatorial da lente em a segmentos iguais induz uma divisão de cada hemisfério em a triângulos congruentes, com os ângulos $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{a}$.

4.5.1 Espaços lenticulares

Os espaços lenticulares têm uma longa história, sendo a primeira classe infinita de 3-variedades a ser descrita pelos topólogos. Durante os anos 1908–1935, a classificação de espaços lenticulares foi considerada um dos mais importantes problemas abertos em topologia. O matemático alemão K. Reidemeister (1935) deu uma classificação combinatória de espaços lenticulares, que também constitui uma classificação topológica, graças aos resultados de Moise do início dos anos 1950. Além do seu papel na topologia do início do seculo XX, os espaços lenticulares são também interessantes do ponto vista geométrico, sendo a mais simples família infinita de $(S^3, \mathcal{S})$-variedades distintas.

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, o poliedro mais simples possível é o tetraedro, que tem 4 faces. Curiosamente, a 3-esfera S^3 contém poliedros até mais simples, com apenas duas faces – as chamadas *lentes esféricas*. O nome *espaço lenticular* origina-se da construção geométrica desses espaços por colagem de lentes esféricas e vamos começar discutindo as lentes.

Para qualquer ângulo α, podemos utilizar o resultado do Item h dos Exercícios 4.3.9 para encontrar dois planos esféricos Π_1, Π_2 que se intersectam fazendo o ângulo α. Os planos Π_1 e Π_2 limitam uma região com o ângulo interno α, chamado uma *lente esférica de ângulo* α. Uma lente esférica é mostrada na parte esquerda da Figura 4.5.1 – note que a lente tem simetria por rotações ao redor do

eixo vertical C', que intersecta os planos Π_1 e Π_2 perpendicularmente. Esperamos que a leitora não tenha nenhum desconforto por causa das lentes. Elas são objetos simples e agradáveis, embora tenham algumas propriedades exóticas para nossa intuição euclidiana: são poliedros (esféricos) sem vértices, com apenas duas faces e, além disso, têm simetrias por um grupo a um parâmetro de rotações, uma característica bastante rara[4] no mundo de poliedros euclidianos.

Para efetuar as colagens das lentes com mais facilidade, vamos agora subdividir os dois hemisférios de uma lente esférica. Por esse fim, vamos escolher um número natural $a \geqslant 2$ e dividir o círculo equatorial C em a partes iguais, escolhendo pontos equidistantes $p_0, p_1, \ldots, p_{a-1} \in C$ – por exemplo, se $\gamma : [0, 2\pi] \to S^3$ é uma parametrização de C pelo comprimento de arco, podemos tomar $p_k = \gamma(2\pi k/a)$ para todo $k \in \{0, \ldots, a-1\}$, como visualizado no lado direito da Figura 4.5.1.

No que segue, vamos supor que o ângulo da lente é $\alpha = \frac{2\pi}{a}$ e que os pontos equatoriais equidistantes $\{p_k\}_{k=0}^{a-1}$ foram escolhidos de uma maneira ou outra. Juntamente com os polos $N \in \Pi_1 \cap C'$ e $S \in \Pi_2 \cap C'$, os pontos p_k formam os vértices de triângulos nos planos Π_1 e Π_2. Na parte direita da Figura 4.5.1, dois desses triângulos estão coloridos. Os triângulos adjacentes no mesmo hemisfério são levados um ao outro pela translação de distância $2\pi/a$ ao longo de C, translação essa que é, ao mesmo tempo, uma rotação ao redor de C' pelo ângulo $2\pi/a$, como já discutido no Item c dos Exercícios 4.3.10. Analogamente, cada triângulo do hemisfério "norte" (que contém N) pode ser transformado sobre o triângulo correspondente no hemisfério "sul" por meio da rotação pelo ângulo $\alpha = \frac{2\pi}{a}$ ao redor de C. Dessa forma, podemos considerar a lente como um poliedro esférico P_a com $2a$ faces congruentes: a triângulos no hemisfério norte e mais a no hemisfério sul.

Seja b um número inteiro tal que $\gcd(a, b) = 1$ e seja P_a a lente construída acima e visualizada no lado direito da Figura 4.5.1. O *espaço lenticular* $L(a, b)$ é definido como o resultado da colagem das faces triangulares de P_a por meio das identificações:

$$[p_k \; S \; p_{k+1}] \longleftrightarrow [p_{k+b} \; N \; p_{k+b+1}], \quad k \in \{0, 1, \ldots, a-1\}, \tag{4.5.1}$$

onde os índices devem ser sempre reduzidos módulo a. Em outras palavras, cada triângulo T do hemisfério sul é colado a um triângulo correspondente T' no hemisfério norte, e para encontrar esse triângulo nortenho T', começamos no triângulo diretamente "acima" de T e saltamos b triângulos na direção anti-horária (olhando

[4] tão rara que é inexistente, aliás.

do polo norte). Por exemplo, quando $a = 6$ e $b = 5$, os dois triângulos tintos na imagem direita da Figura 4.5.1 têm de ser colados na construção de $L(6,5)$. (O mesmo acontece quando $b = -1$, porque $-1 \equiv 5 \mod 6$.) Dessa forma, cada um dos a triângulos do hemisfério sul acaba sendo colado a um único triângulo do hemisfério norte – e como todos esses triângulos são congruentes, as colagens podem ser feitas por meio de isometrias locais esféricas que preservam a orientação.

Exercícios 4.5.1. a) Sejam a, b dois números inteiros que satisfazem $a \geqslant 2$ e $\gcd(a,b) = 1$. Supondo que o círculo equatorial C é a geodésica definida no Item a dos Exercícios 4.3.10, descreva explicitamente a isometria $\psi \in \mathrm{Isom}^+(S^3)$, que realiza a colagem dos triângulos (4.5.1), como uma matriz em SO(4) ou por meio de multiplicação quaterniônica.

b) Mostre que o espaço lenticular $L(2,1)$ é homeomorfo ao espaço projetivo $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ discutido na Página 100.

Para verificar que o espaço lenticular $L(a,b)$ é uma $(S^3, \mathcal{S})$-variedade, temos de nos certificar de que estão satisfeitas as Condições 4.4.4. A primeira condição já foi verificada pelo leitor no Item a dos Exercícios 4.5.1 acima, então vamos começar com o ponto ii – as equações de colagem.

A lente P_a tem dois tipos de arestas: as arestas "equatoriais" $[p_k\ p_{k+1}]$ (índices mod a) e as arestas "semimeridionais" da forma $[N\ p_k]$ ou $[S\ p_k]$, $0 \leqslant k < a$. No processo de colagem, descrito pela Equação (4.5.1), a aresta $[p_k\ p_{k+1}]$ é colada à aresta $[p_{k+b}\ p_{k+b+1}]$, que é, por sua vez, colada a $[p_{k+2b}\ p_{k+2b+1}]$, e esse processo continua até voltarmos à aresta inicial. Mais precisamente, vamos voltar à aresta $[p_k\ p_{k+1}]$ depois de colarmos m arestas equatoriais, onde $m \in \mathbb{N}$ é o menor número positivo satisfazendo

$$k + mb \equiv k \mod a.$$

Para resolver essa congruência, podemos subtrair k de ambos os lados e lembrar que $mb \equiv 0 \mod a$ diz que mb é divisível por a. Portanto, a nossa hipótese de $\gcd(a,b) = 1$ implica que o número positivo m tem de ser divisível por a, e o menor número com essa propriedade é $m = a$. Em outras palavras, *todas* as arestas equatoriais acabam sendo coladas uma a outra, formando uma só aresta no espaço quociente $L(a,b)$. Por isso, a equação de colagem para as arestas equatoriais é $a \cdot \alpha = 2\pi$, o que explica a nossa escolha do ângulo $\alpha = \frac{2\pi}{a}$ – graças a essa escolha, a equação de colagem é sempre satisfeita no equador.

A análise das arestas "semimeridionais", que saem dos polos, é também fácil. O ângulo diedral ao longo de uma aresta semimeridional é igual a $\pi = 180°$, porque cada tal aresta separa dois pedaços do mesmo plano. Como cada aresta $[S\ p_k]$

é colada à única aresta $[N\ p_{k+b}]$, todas suas equações de colagem estão satisfeitas trivialmente: $\pi + \pi = 2\pi$. Em conclusão, as colagens (4.5.1) da lente esférica P_a sempre satisfazem o ponto ii das Condições 4.4.4.

Finalmente, temos de analisar a condição iii, calculando a característica de Euler de um espaço lenticular $L(a,b)$. A decomposição celular de $L(a,b)$ induzida pelo poliedro P_a, mostrado no lado direito da Figura 4.5.1, contém as seguintes células:

0. Duas 0-células: $N \sim S$ e $p_0 \sim p_1 \sim \cdots \sim p_{a-1}$;

1. Uma única 1-célula equatorial $[p_0\ p_1] \sim [p_1\ p_2] \sim \cdots \sim [p_{a-2}\ p_{a-1}] \sim [p_{a-1}\ p_0]$ e a família de a 1-células da forma $[S\ p_k] \sim [N\ p_{k+b}]$, onde $k \in \{0, \ldots, a-1\}$;

2. O número de 2-células é a, cada uma delas sendo o resultado da colagem (4.5.1) de dois triângulos;

3. Há uma única 3-célula, proveniente do interior da lente.

Consequentemente, podemos calcular a característica de Euler de modo seguinte:

$$\chi\big(L(a,b)\big) = 2 - (a+1) + a - 1 = 0,$$

mostrando que a nossa colagem satisfaz todas as Condições 4.4.4.

Uma observação interessante é que uma lente esférica é completamente determinada pelo ângulo α, a menos de congruência (isometria). Para que se satisfaçam as equações de colagem, devemos escolher $\alpha = \frac{2\pi}{a}$, o que fixa totalmente a geometria da lente esférica P_a. Como consequência, a estrutura esférica no espaço lenticular $L(a,b)$ é *rígida* no seguinte sentido. Suponhamos que temos dois espaços lenticulares homeomorfos $M \cong M' \cong L(a,b)$, e que M e M' são ambos equipados com estruturas de $(S^3, \mathcal{S})$-variedades. Então, as geometrias de M e de M' têm de ser idênticas, ou seja, existe sempre uma isometria entre M e M'.

Exercícios 4.5.2. a) Mostre que a 3-esfera S^3 pode ser dividida em a lentes de ângulo $\alpha = \frac{2\pi}{a}$, com interiores disjuntos.

b) Usando o resultado do Item a dos Exercícios 4.5.1, construa um subgrupo Γ de $\mathrm{Isom}^+(S^3)$ gerado pelas isometrias que colam as faces da lente, de modo que $L(a,b) \cong S^3/\Gamma$.

c) Mostre que o grupo Γ do ponto anterior é isomorfo ao grupo cíclico de ordem a.

O exercício acima permite-nos calcular o volume do espaço lenticular $L(a,b)$:

$$\operatorname{Vol}\big(L(a,b)\big) = \frac{1}{a}\operatorname{Vol}(S^3) = \frac{2\pi^2}{a}, \tag{4.5.2}$$

onde usamos o fato que $\operatorname{Vol}(S^3) = 2\pi^2$.

Para finalizar a nossa discussão de espaços lenticulares, vamos discutir brevemente o problema de classificação: quais dos espaços lenticulares $L(a,b)$ são homeomorfos? Graças à unicidade das estruturas esféricas nos espaços lenticulares, o volume esférico $\operatorname{Vol}\big(L(a,b)\big)$ é um invariante topológico de $L(a,b)$. Por isso, a Equação (4.5.2) implica que o número $a = \operatorname{Vol}(S^3)/\operatorname{Vol}\big(L(a,b)\big)$ é também um invariante topológico.[5] Portanto, dois espaços $L(a,b)$ e $L(a',b')$ podem ser homeomorfos só quando $a = a'$, e o problema de classificação topológica de espaços lenticulares reduz-se à seguinte pergunta: para quais valores de b, b' temos $L(a,b) \cong L(a,b')$? É claro que apenas a classe de congruência de b (mod a) importa na Equação (4.5.1), então, para cada $a \geqslant 2$, existe um número finito de espaços lenticulares distintos $L(a,b)$. Trocando os pontos N e S na Equação (4.5.1), vemos que $L(a,b) \cong L(a,-b)$ – essa troca corresponde, geometricamente, a uma reflexão da lente da imagem direita da Figura 4.5.1 no plano horizontal. Uma propriedade menos óbvia é que $L(a,b)$ é também homeomorfo a $L(a,\overline{b})$, onde $\overline{b}$ é o inverso de b mod a. A classificação completa, estabelecida por K. Reidemeister (1935), diz que $L(a,b) \cong L(a,b')$ se e somente se $b \equiv \pm b'$ ou $bb' \equiv \pm 1$ módulo a.

4.5.2 O espaço dodecaédrico de Poincaré

Na Página 102, introduzimos o *espaço dodecaédrico de Poincaré* por meio de uma colagem das faces de um dodecaedro regular. Nesta seção, vamos discutir os aspectos geométricos dessa construção, com o objectivo de equipar o espaço dodecaédrico de Poincaré com a estrutura de uma variedade esférica.

Como visualizado na parte direita da Figura 3.1.7, as faces opostas de um dodecaedro regular, embora paralelas, não são relacionadas uma a outra por uma simples translação – cada face precisa de ser rodada pelo ângulo de $\frac{\pi}{5} = 36°$ depois da translação.[6] Do ponto de vista topológico, isso não apresenta nenhum

[5] Uma prova alternativa desse fato usa o grupo fundamental: $a = |\pi_1\,(L(a,b))|$ – veja o Item c dos Exercícios 4.5.2.

[6] Ou antes da translação, ou até mesmo "durante" a translação, já que translações ao longo de uma reta comutam com rotações ao redor da reta.

problema, como já verificamos no Exercício 3.3.14, mostrando que o espaço dodecaédrico de Poincaré é uma 3-variedade topológica.

Na verdade, podemos começar com um dodecaedro euclidiano, como ilustrado na parte esquerda da Figura 3.1.7, e colar suas faces por meio desses "movimentos de parafuso", que combinam a translação de cada face, até ao plano da face oposta, com uma rotação por $\frac{\pi}{5}$ radianos, que alinha as duas faces. Como todas as faces são pentágonos congruentes, essas colagens são isometrias euclidianas e, por isso, seria talvez tentador usar essa descrição do espaço dodecaédrico de Poincaré para equipá-lo com uma geometria. Infelizmente, o dodecaedro euclidiano não satisfaz a condição ii, que tem a ver com as equações de colagem. Analisando a Figura 3.1.8, observamos que cada aresta do dodecaedro é colada a duas outras arestas, sendo agrupadas em grupos de três. Para que a soma de ângulos diedrais nas arestas unidas pela colagem seja $2\pi = 360°$, o ângulo diedral deve ser $\frac{2}{3}\pi = 120°$, o que *não é o caso* em geometria euclidiana.

Nos exercícios abaixo, vamos calcular o ângulo diedral num dodecaedro regular euclidiano e mostrar que ele é *menor* de 120°, justificando assim que a colagem do dodecaedro regular euclidiano, mostrada na Figura 3.1.8, não satisfaz as equações de colagem. Depois, vamos resolver esse problema, construindo um dodecaedro regular *esférico* no qual os ângulos diedrais são exatamente iguais a $\frac{2}{3}\pi = 120°$, o que nos permitirá equipar o espaço dodecaédrico de Poincaré com uma $(S^3, \mathcal{S})$-estrutura.

Exercícios 4.5.3. Nestes exercícios, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ denota o *número de ouro*, também conhecido como a *razão áurea*.

a) Verifique as seguintes propriedades básicas de ϕ:

$$\phi^2 = \phi + 1, \quad \phi^{-1} = \phi - 1 = \sqrt{2 - \phi}. \tag{4.5.3}$$

Verifique também que o número $\frac{\phi-1}{2}$ é a única raiz positiva do polinômio $4x^2 + 2x - 1$.

b) Usando a fórmula $\cos\alpha = \mathrm{Re}(e^{i\alpha})$, ou outros meios, mostre que

$$\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\ \mathrm{sen}^2\alpha. \tag{4.5.4}$$

c) Considere agora o ângulo $\alpha = \frac{\pi}{10} = 18°$. Usando a igualdade $3\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ e a fórmula (4.5.4), mostre que $\mathrm{sen}\,\alpha$ é a raiz positiva do polinômio $4x^2 + 2x - 1$. Conclua, do Item a acima, que $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\phi-1}{2}$.

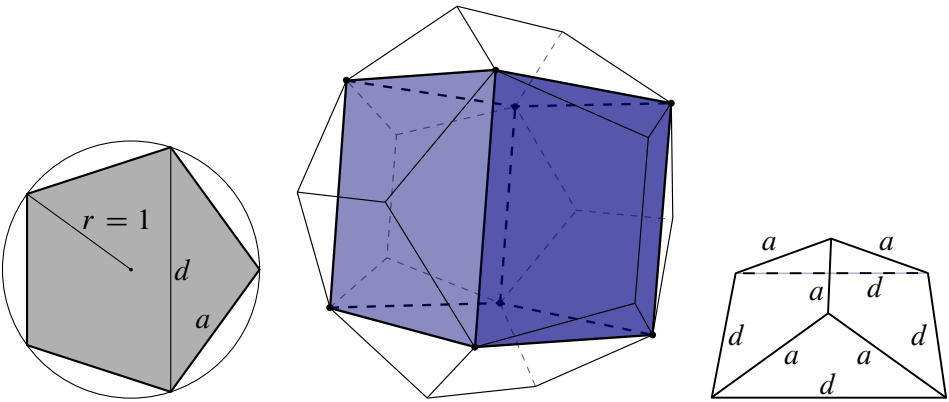


Figura 4.5.2: Esquerda: O pentágono regular inscrito no círculo unitário tem arestas de comprimento a e diagonais de comprimento d, dados pela Equação (4.5.6). **Centro:** Um cubo inscrito num dodecaedro regular euclidiano. Se as arestas do dodecaedro têm comprimento a, então as arestas do cubo têm comprimento d. **Direita:** Para construir o dodecaedro regular mostrado no centro da figura, basta começar com o cubo e colar, a cada face, um "telhado" com base quadrada, da forma mostrada aqui.

d) Usando o item anterior e o Item a acima, mostre que

$$\operatorname{sen}\left(\tfrac{2}{5}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\phi} \quad \text{e} \quad \cos\left(\tfrac{2}{5}\pi\right) = \frac{\phi - 1}{2}. \tag{4.5.5}$$

e) Seja P o pentágono regular inscrito no círculo unitário, ilustrado na parte esquerda da Figura 4.5.2. Mostre que o comprimento a da aresta de P e o comprimento d da diagonal de P são dados pelas igualdades

$$a^2 = 3 - \phi, \quad d^2 = 2 + \phi. \tag{4.5.6}$$

Dica: Use a Equação (4.5.5).

f) Seja δ o ângulo diedral de um dodecaedro regular euclidiano, ou seja, o ângulo entre duas faces vizinhas. Utilizando a Equação (4.5.6), mostre que

$$\operatorname{sen}^2\left(\tfrac{\delta}{2}\right) = \frac{2+\phi}{5}. \tag{4.5.7}$$

Dica: Considere o sólido na forma de um "telhado" na imagem direita da Figura 4.5.2. Se precisar elevar ϕ ao quadrado, aplique (4.5.3) para simplificar os cálculos.

g) Utilizando o resultado do item anterior, mostre que $\delta < \frac{2}{3}\pi = 120°$. *Dica:* Estime $\frac{\delta}{2}$ usando o valor conhecido $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Seja D_1 um dodecaedro regular euclidiano, inscrito na esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. O dodecaedro D_1 é completamente determinado pelo conjunto $V_1 \subset S^2$ dos seus vértices – na verdade, D_1 é a envoltória convexa do conjunto $V_1 \subset \mathbb{R}^3$. Mais geralmente, para qualquer raio $r > 0$, a esfera bidimensional $S(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{R}^3$ contém o conjunto $V_r = r \cdot V_1 = \{rv : v \in V_1\}$, que define os vértices do dodecaedro regular euclidiano D_r inscrito em $S(\mathbf{0}, r)$.

Para construir dodecaedros regulares *esféricos*, temos de relacionar tudo isso à 3-esfera S^3, e achamos que a melhor maneira de fazê-lo é com ajuda das técnicas da Seção 2.4, onde a 3-esfera foi identificada com o grupo de Lie SU(2). Usando as coordenadas reais (u, v, w) da Equação (2.4.1), podemos entender a 2-esfera euclidiana $S(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{R}^3$ como um subconjunto da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$. O que acontece a $S(\mathbf{0}, r)$ sob a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{SU}(2)$? Conforme o resultado do Item d dos Exercícios 2.4.10, para cada vetor $t\mathbf{p} \in \mathfrak{su}(2)$, onde $\|\mathbf{p}\| = 1$, temos $\exp(t\mathbf{p}) = \cos t + \mathbf{p} \operatorname{sen} t$. Em particular, quando t aumenta de 0 a $r \leqslant \frac{\pi}{2}$, o ponto $\exp(t\mathbf{p})$ percorre a geodésica $\gamma(t) = \cos t + \mathbf{p} \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant r$. A curva γ sai do ponto inicial $\gamma(0) = \mathbf{1}$ e atinge, quando $t = r$, o ponto $\gamma(r)$ a distância r de $\mathbf{1}$. Isso quer dizer que a imagem $\exp\big(S(\mathbf{0}, r)\big)$ é o subconjunto de S^3 formado por *todos* os pontos que ficam a distância esférica r do ponto $\mathbf{1}$, ou seja, $\exp\big(S(\mathbf{0}, r)\big)$ é uma *esfera esférica* – uma esfera em S^3, de raio (esférico!) r, centrada no ponto $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0)$.

Exercício 4.5.4. Tratando S^3 como um subconjunto de $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$, mostre que a esfera esférica $\exp\big(S(\mathbf{0}, r)\big)$ é também uma 2-esfera *euclidiana* em $\mathbb{R}^4$ e encontre seus centro e raio. *Dica:* A resposta não é $(\mathbf{1}, e^r)$.

Em particular, o conjunto $V_r \subset S(\mathbf{0}, r)$ de vértices de um dodecaedro regular euclidiano transforma-se num conjunto $\exp(V_r)$ de pontos da esfera esférica centrada no ponto $\mathbf{1}$, de raio esférico r. Por analogia com o caso euclidiano, o *dodecaedro regular esférico* E_r é o menor subconjunto *geodesicamente convexo* de S^3 que contém os vértices $\exp(V_r)$ e o ponto $\mathbf{1}$. Em geral, um conjunto é geodesicamente convexo se, para quaisquer dois de seus pontos, o segmento geodésico que minimiza a distância entre os dois está completamente contido no conjunto. Nesse sentido, conjuntos geodesicamente convexos generalizam os conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, da mesma forma em que as geodésicas generalizam os segmentos de retas.

Embora a definição do dodecaedro esférico E_r enunciada acima seja abstrata, podemos também construir E_r de modo mais explícito, encontrando pentágonos

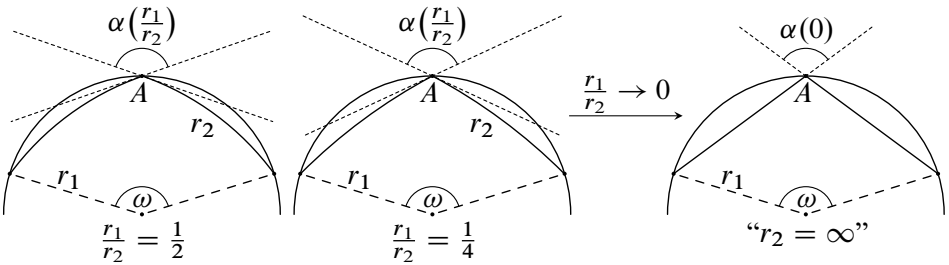


Figura 4.5.3: Esquerda: O ângulo central ω num círculo de raio r_1 é bissectado pelo raio passando por A (não desenhado). Nele foram inscritos dois arcos de círculos de raio r_2 que se intersectam no ponto A. Se ω é fixo, então o ângulo $\alpha\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ depende apenas da razão $r_1 : r_2$ entre os dois raios. **Direita:** Quando o raio r_2 tende ao infinito, os arcos aproximam-se cada vez mais a segmentos de linhas retas. Consequentemente, quando a razão $r_1 : r_2$ tende a zero, α aproxima-se, continuamente, ao ângulo entre dois segmentos retos, igual a $\alpha(0) = \pi - \frac{\omega}{2}$.

esféricos (pedaços de esferas bidimensionais máximas) que definem as faces de E_r, da mesma maneira em que pentágonos euclidianos formam as faces de D_r. Esses pentágonos esféricos são, na verdade, regulares: todas as suas arestas têm o mesmo comprimento, que depende, claro, do parâmetro r. O que talvez seja menos óbvio é que os *ângulos diedrais* de E_r também dependem de r, algo que não acontece na geometria euclidiana.

Para melhor entendermos o comportamento dos ângulos de E_r, vamos agora analisar um modelo simplificado, voltando por um momento ao mundo euclidiano. Como a medição de ângulos é, essencialmente, um problema bidimensional, podemos simplesmente analisar os ângulos de um "polígono" cujas arestas são arcos de círculos. Na Figura 4.5.3, vemos o ângulo α entre dois arcos de círculos de raio r_2, cada um dos quais subtende o ângulo central $\omega/2$ no círculo de raio r_1. Se o ângulo ω é fixo, então α depende apenas do quociente $\frac{r_1}{r_2}$ dos dois raios. Essa dependência é de fato contínua, ou seja, α é uma função contínua do quociente $\frac{r_1}{r_2}$. Em particular, quando $r_2 \to \infty$ com r_1 fixo, os arcos de raio r_2 aproximam-se cada vez mais a segmentos de retas, fazendo com que o ângulo $\alpha = \alpha\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ convirja para o valor $\alpha(0)$, que representa o ângulo entre dois segmentos retos, como mostrado na parte direita da Figura 4.5.3. O mesmo acontece quando r_2 é fixo e r_1 tende a zero: neste caso também vale $\frac{r_1}{r_2} \to 0$ e, consequentemente,

$$\lim_{\substack{r_1 \to 0^+ \\ r_2 = \text{const}}} \alpha\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \alpha(0). \tag{4.5.8}$$

Voltando ao dodecaedro esférico $E_r \subset S^3$, denotemos por δ_r seu ângulo diedral. O ângulo δ_r pode ser medido entre duas geodésicas contidas nas faces-vizinhas, desde que as geodésicas sejam perpendiculares à aresta que separa as duas faces. Assim, a situação é quase idêntica àquela mostrada à esquerda na Figura 4.5.3, com $r_2 \equiv 1$ – pois as duas geodésicas são círculos máximos – e onde $\delta_r = \alpha(r_1)$. Nesse caso, o ponto A na figura corresponde ao ponto de intersecção das geodésicas, que fica dentro duma aresta de E_r, enquanto r_1 é a distância desse ponto ao ponto $\mathbf{1}$. Como pontos nas arestas são "mais internos" – isto é, mais próximos do centro da esfera esférica na qual o dodecaedro está inscrito – do que os vértices V_r, o raio r_1 sempre satisfaz $0 < r_1 \leqslant r$. Como consequência de tudo isso, quando $r \to 0$, vale também $r_1 \to 0$, e a Equação (4.5.8) implica a igualdade

$$\lim_{r \to \mathbf{0}} \delta_r = \delta, \tag{4.5.9}$$

onde δ é o ângulo diedral num dodecaedro regular *euclidiano*.

A Equação (4.5.9) tem a seguinte interpretação: quando o raio $r > 0$ é muito pequeno, o dodecaedro esférico E_r tem "quase" a mesma geometria que um dodecaedro euclidiano, ou seja, quando r tende a zero, pequenos dodecaedrinhos esféricos E_r tornam-se geometricamente "os mesmos" – *no limite* – que os dodecaedros euclidianos D_r. Claramente, esse fenômeno afeta também outras formas geométricas e não apenas dodecaedros. Portanto, podemos dizer, informalmente, que a geometria esférica "infinitesimal" é a mesma que a geometria euclidiana.

Por outro lado, quando o raio r cresce até ao valor de $\frac{\pi}{2}$, estamos atravessando a Figura 4.5.3 da direita para esquerda: os dodecaedros E_r tornam-se "mais gordos" e seus ângulos diedrais aumentam. No exercício abaixo, consideramos o caso extremo de $r = \frac{\pi}{2}$.

Exercício 4.5.5. Mostre que $\exp\big(S(\mathbf{0}, \frac{\pi}{2})\big)$ é um plano em S^3 e conclua que $\delta_r = \pi$ quando $r = \frac{\pi}{2}$. Desenhe $E_{\frac{\pi}{2}}$.

Nos Exercícios 4.5.3, mostramos que o ângulo diedral δ de um dodecaedro *euclidiano* satisfaz $\delta < 120°$ – na verdade, $\delta \approx 116,565°$, o que pode ser verificado com uma calculadora a partir da Equação (4.5.7). Em conclusão, o ângulo diedral δ_r do dodecaedro esférico E_r é uma função contínua da variável $r \in (0, \frac{\pi}{2}]$, satisfaz $\delta_{\pi/2} = \pi$, e tem o limite δ quando $r \to 0$. Por isso, o teorema do valor intermediário garante que existe um raio $r^* \in (0, \frac{\pi}{2})$ para o qual o dodecaedro esférico E_{r^*} tem o ângulo diedral $\delta_{r^*} = \frac{2}{3}\pi = 120°$. É exatamente esse dodecaedro esférico E_{r^*} que podemos colar geometricamente, por isometrias das faces opostas, de modo que as equações de colagem sejam satisfeitas: a soma de

ângulos ao redor de cada aresta é $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$. Dessa forma, o espaço dodecaédrico de Poincaré pode ser equipado com a estrutura de uma $(S^3, \mathcal{S})$-variedade, e sua geometria esférica é determinada pela geometria desse dodecaedro muito especial E_{r*}.

Analisando os ângulos diedrais δ_r um pouco mais, podemos concluir que δ_r é uma função estritamente crescente de r, então o dodecaedro esférico E_{r*} construído acima é único. Como no caso dos espaços lenticulares, isso implica que a estrutura esférica no espaço dodecaédrico de Poincaré é também única.

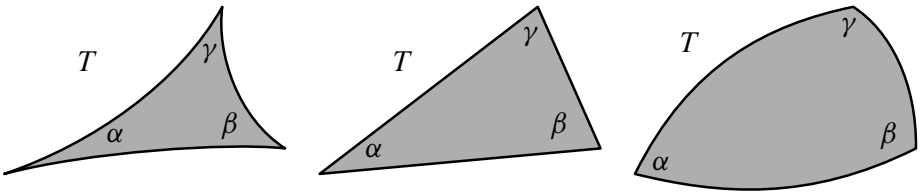
4.6 Geometria hiperbólica

Nesta seção, vamos introduzir a *geometria hiperbólica*, caracterizada pela *curvatura negativa*, em contraste com a geometria esférica (de curvatura positiva) e a geometria euclidiana (de curvatura zero), discutidas nas seções anteriores. Não vamos definir a curvatura rigorosamente aqui, e a leitora interessada em profundar esse assunto pode consultar o livro de M. P. do Carmo (1988). Em geral, além da curvatura de Riemann, existem vários tipos de curvatura definidos em termos dela como, por exemplo, curvaturas seccionais, curvatura de Ricci e curvatura escalar. A curvatura relevante a esta seção é a curvatura seccional, que não depende da escolha da "seção", desde que o espaço seja isotrópico. Ao invés de falar sobre conceitos que não definimos, como a curvatura, vamos simplesmente analisar alguns dos seus efeitos, por exemplo, sobre a soma de ângulos em um triângulo.

Na geometria euclidiana, que tem *curvatura zero*, a soma de ângulos num triângulo é sempre igual a π, independentemente do tamanho do triângulo. Outra maneira de entender esse fenômeno é por meio de dilatações – transformações da forma $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$, onde $\lambda > 0$ – que levam cada triângulo em $\mathbb{R}^n$ a um triângulo similar, com os mesmos ângulos. Por preservarem ângulos, as dilatações constituem exemplos de transformações *conformes*, apesar de não serem isometrias.

Por outro lado, os ângulos de um triângulo *esférico* determinam a área do triângulo, e a soma dos ângulos sempre ultrapassa π. Isso está relacionado com a *curvatura positiva* de S^3: todas as curvaturas seccionais em S^3 são positivas e são, ademais, constantes iguais a $+1$. Mesmo que não saibamos o que são essas curvaturas, uma das manifestações de sua positividade é a esfera não poder ser "dilatada" – não se pode definir transformações da esfera que aumentem ou diminuam todas as distâncias por um fator constante $\lambda \neq 1$.

A terceira possibilidade para uma geometria homogênea e isotrópica é ter curvatura *negativa*, por exemplo igual a -1 por toda parte. Essa propriedade caracte-



Curvatura -1	**Curvatura** 0	**Curvatura** $+1$
soma de ângulos: $\alpha+\beta+\gamma<\pi$	soma de ângulos: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$	soma de ângulos: $\alpha+\beta+\gamma>\pi$
$\mathrm{A}(T)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)<\pi$	área não determinada pelos ângulos de T	$\mathrm{A}(T)=(\alpha+\beta+\gamma)-\pi<4\pi=\mathrm{A}(S^2)$

Tabela 4.6.1: Comparação de propriedades geométricas de triângulos em espaços homogêneos e isotrópicos de curvatura negativa, zero e positiva.

riza o *espaço hiperbólico*, dentro do qual também não há dilatações e a soma de ângulos de um triângulo é sempre menor que π. Na Tabela 4.6.1, comparamos as propriedades básicas de triângulos nesses três casos. No espaço hiperbólico todas as transformações conformes são automaticamente isometrias.

Ao introduzirmos a geometria esférica na Seção 4.2, restringimos o produto escalar euclidiano aos espaços tangentes de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Em particular, a 3-esfera geométrica S^3 é localmente isometricamente mergulhada dentro do 4-espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$, mas não vale a recíproca: não é possível mergulhar suavemente[7] o espaço $\mathbb{R}^{n-1}$ na esfera S^n por isometrias locais. Em certo sentido, na esfera "não há espaço suficiente" para abrigar uma cópia localmente isométrica do espaço euclidiano, de qualquer dimensão. O espaço hiperbólico tridimensional H^3, que vamos introduzir nesta seção, contém "mais espaço" do que o espaço euclidiano: ele contém cópias de $\mathbb{R}^2$, mas a recíproca não é verdade, isto é, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ "não há espaço suficiente" para nele mergulhar, suave e localmente isometricamente, o espaço hiperbólico H^3, para qualquer n.

Dado que o espaço hiperbólico não pode ser realizado como uma subvariedade localmente isometricamente mergulhada em $\mathbb{R}^n$, temos de tomar mais cuidado quando analisamos esse espaço, pois todas as imagens de H^3 que podemos dese-

[7] *suave* significa aqui de classe C^∞

nhar "mentem", de uma maneira ou outra e, portanto, precisamos estar conscientes e atentos às limitações da nossa intuição euclidiana. Por essa razão, desenvolveu-se, ao longo do tempo, vários modelos de geometria hiperbólica tridimensional: o modelo da bola de Poincaré, o modelo do semiespaço superior, o modelo do hiperboloide, o modelo da bola de Klein, o modelo do hemisfério superior, etc. Embora todos esses modelos sejam equivalentes (isométricos), cada um deles oferece uma maneira diferente de definir H^3 e de fazer desenhos, que ilustram bem certos aspectos da geometria e outros nem tanto. Para os nossos objetivos, admitidamente modestos, será suficiente estudarmos apenas o modelo da *bola de Poincaré*, mas recomendamos que o leitor interessado pelos detalhes e por outros modelos da geometria hiperbólica consulte os livros de Beardon (1995), Benedetti e Petronio (1992), Ratcliffe (2019) e Thurston (1997).

4.6.1 A bola de Poincaré

Vamos agora definir o 3-espaço hiperbólico H^3, usando o modelo conhecido como *a bola de Poincaré*. Neste modelo, H^3 é a bola aberta de raio 1,

$$H^3 = \operatorname{Int} D^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 1\},$$

mas a métrica riemanniana em H^3 *não é* uma simples restrição do produto escalar. Ao invés disso, para cada ponto $\mathbf{x} \in H^3$ e quaisquer vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}H^3 = T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3$, definimos a métrica riemanniana em $\mathbf{x}$ pela fórmula:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{x}} = \frac{4\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\left(1 - \|\mathbf{x}\|^2\right)^2}, \tag{4.6.1}$$

onde os parênteses angulares no lado direito se referem ao produto escalar euclidiano em $\mathbb{R}^3$.

Definição 4.6.1. O 3-*espaço hiperbólico*, no modelo de bola de Poincaré, é o conjunto H^3 com a métrica riemanniana definida na Equação (4.6.1).

Vejamos agora algumas das consequências da definição. Primeiro, vamos observar que a métrica hiperbólica (4.6.1) pode ser interpretada como uma "reajuste" do produto escalar euclidiano pelo fator numérico $\frac{2}{1-\|\mathbf{x}\|^2}$. Mais precisamente, temos

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{x}} = \left\langle \frac{2}{1 - \|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{v},\ \frac{2}{1 - \|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{w} \right\rangle, \tag{4.6.2}$$

ou seja, passar da métrica euclidiana à métrica hiperbólica é o mesmo que multiplicar todos vetores por esse fator, que depende somente da norma euclidiana de $\mathbf{x}$. Em particular, o ângulo hiperbólico entre vetores tangentes é o mesmo que o ângulo euclidiano, pois a multiplicação de dois vetores pelo mesmo escalar positivo não muda o ângulo entre eles. Nesse sentido, o modelo da bola de Poincaré é *conforme* – os ângulos hiperbólicos na bola de Poincaré são os mesmos que os ângulos euclidianos.

Nos exercícios abaixo, vamos confirmar que a métrica hiperbólica na bola de Poincaré é invariante sob as simetrias euclidianas da bola, isto é, sob as transformações ortogonais de $\mathbb{R}^3$.

Exercícios 4.6.2. a) Mostre que toda matriz ortogonal $A \in \mathrm{O}(3)$ preserva a métrica hiperbólica, ou seja, satisfaz

$$\langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w}\rangle_{A\mathbf{x}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_{\mathbf{x}}$$

para cada $\mathbf{x} \in H^3$ e quaisquer vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}H^3$.

b) Prove que a métrica hiperbólica satisfaz a condição de isotropia na origem $\mathbf{0} \in H^3$, ou seja, para quaisquer dois vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{0}}H^3$, de norma 1, existe uma isometria $\psi : H^3 \to H^3$ tal que $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $D\psi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. *Dica:* A maior parte do trabalho já foi feita no item acima.

Os exercícios acima mostram que $\mathrm{O}(3) \subset \mathrm{Isom}(H^3)$ – em particular, todos os raios da bola de Poincaré são congruentes um ao outro, na métrica hiperbólica. Portanto, para calcular o comprimento desses raios, basta considerarmos apenas um deles – por exemplo, o raio ao longo do eixo x, ou seja, a curva

$$\gamma : [0, 1) \to H^3, \quad \gamma(t) = (t, 0, 0).$$

O vetor tangente a γ é $\gamma'(t) = (1, 0, 0)$ e, segundo a fórmula geral do comprimento de uma curva na métrica riemanniana, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle_{\gamma(t)}}\, dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{4\langle (1,0,0), (1,0,0)\rangle}{\big(1 - \|(t,0,0)\|^2\big)^2}}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1-t^2}\, dt = +\infty. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

Exercício 4.6.3. Verifique a última igualdade acima, mostrando que a integral imprópria $\int_0^1 \frac{2dt}{1-t^2}$ é divergente.

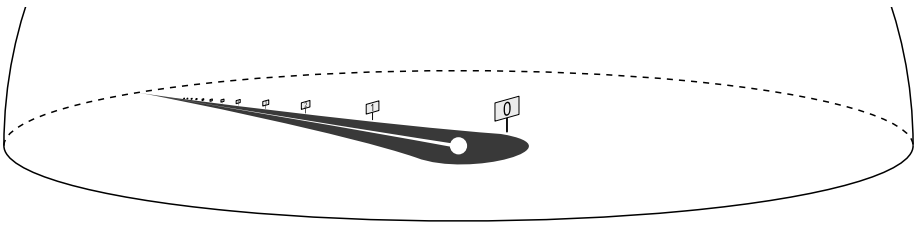


Figura 4.6.1: Uma estrada sem fim, percorrendo um raio da bola de Poincaré – um raio geodésico infinito em H^3. Um veículo viajando ao longo da estrada vai aparecer, aos nossos olhos euclidianos, como se o tamanho dele estivesse diminuindo, exponencialmente, ao longo do caminho. Mas isso é apenas uma ilusão: o tamanho hiperbólico dele não muda. Similarmente, a estrada tem largura hiperbólica constante.

Assim, acabamos de descobrir que os raios da bola de Poincaré têm comprimentos infinitos. Na verdade, esses raios são raios geodésicos ou, equivalentemente, os *diâmetros* da bola são linhas geodésicas, de comprimento infinito, na geometria hiperbólica. Para justificar essa afirmação, vamos aplicar o mesmo truque que foi usado na prova do Teorema 4.3.5, construindo uma isometria hiperbólica que fixa um diâmetro dado.

Consideremos, então, qualquer diâmetro ℓ da bola de Poincaré. Notemos que ℓ é completamente determinado por um vetor unitário $\mathbf{v} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$, sendo $\ell = \{t\mathbf{v} : t \in (-1, 1)\}$. Seja $\gamma_{\mathbf{0},\mathbf{v}}$ a única geodésica em H^3 que sai da origem $\mathbf{0}$ na direção do vetor $\mathbf{v}$. O nosso objetivo é mostrar que $\gamma_{\mathbf{0},\mathbf{v}}$ parametriza o diâmetro ℓ. Para esse fim, vamos considerar uma rotação não trivial $A \in \mathrm{SO}(3)$ ao redor de ℓ. Como mostramos nos Exercícios 4.6.2, A é uma isometria de H^3, então A leva geodésicas a outras geodésicas. Além disso, A preserva tanto a origem quanto o vetor $\mathbf{v}$. Pela unicidade de soluções de equações diferenciais, temos $A(\gamma_{\mathbf{0},\mathbf{v}}) = \gamma_{\mathbf{0},\mathbf{v}}$, ou seja, a geodésica $\gamma_{\mathbf{0},\mathbf{v}}$ é fixada, ponto a ponto, pela isometria hiperbólica A. Mas a única curva em H^3 fixada por A é o diâmetro ℓ, o que implica que $\gamma_{\mathbf{0},\mathbf{v}}$ tem de ser uma parametrização de ℓ e mostra que ℓ é uma geodésica hiperbólica.

Como os diâmetros da bola de Poincaré são curvas geodésicas, podemos medir as distâncias entre a origem e qualquer outro ponto de H^3 ao longo do raio que os liga. Consequentemente, nosso cálculo da integral (4.6.3) mostra que a distância da origem $\mathbf{0} \in H^3$ aumenta sem limite ao longo de um raio. Em particular, a esfera unitária S^2 está à "distância infinita" da origem (e de qualquer ponto em

H^3).[8] Por essa razão, vamos chamar essa 2-esfera *a esfera no infinito*, e escrever $S^2 = \partial_\infty H^3$. Notemos que o espaço hiperbólico H^3, em si, não tem bordo: ele é de fato homeomorfo ao espaço $\mathbb{R}^3$, embora não isométrico a ele. Por isso, a esfera $S^2 = \partial_\infty H^3$ não é realmente um "bordo" de H^3 e, para sublinhar isso, vamos usar o símbolo especial "∂_∞". Em certo sentido, a esfera no infinito comporta-se como um "horizonte": os pontos da esfera determinam direções de viagem ao longo de geodésicas infinitas, por exemplo os raios da bola, mas a esfera fica sempre "no infinito" – seres humanos hipotéticos vivendo dentro de H^3 não se podem aproximar a ela. Assim, os pontos da esfera no infinito descrevem os fins de geodésicas hiperbólicas, no sentido topológico da palavra, apesar de não terem "fins" no sentido métrico.

Esse fenômeno interessante é ilustrado na Figura 4.6.1, que mostra uma estrada reta (geodésica), de comprimento infinito, indo na direção de um ponto de $\partial_\infty H^3$. Essa estrada parece reta não apenas a nós, seres euclidianos, mas também ao motorista hiperbólico de um carro viajando por ela. Para nós, a estrada aponta na direção de um ponto específico no horizonte (esfera no infinito), mas o motorista hiperbólico não consegue ver o horizonte, que está "infinitamente longe": $\partial_\infty H^3$ não é parte da bola de Poincaré.

Exercícios 4.6.4. a) Com resultados dos Exercícios 4.6.2, mostre que a 2-esfera euclidiana $S(\mathbf{0}, r) \subset H^3$ é também uma esfera hiperbólica, para todo $r \in (0, 1)$.

b) Com ajuda dos cálculos da Equação (4.6.3), encontre o raio *hiperbólico* da esfera $S(\mathbf{0}, r)$ em termos do raio euclidiano $r \in (0, 1)$.

c) Seja F um disco aberto, de raio 1, centrado na origem de $\mathbb{R}^3$. Mostre que F é uma superfície totalmente geodésica na métrica hiperbólica da bola de Poincaré. *Dica:* Construa uma isometria de H^3 que fixe F ponto a ponto.

Segundo o resultado do exercício anterior, os discos abertos centrados na origem são *planos hiperbólicos*. Na verdade, cada plano hiperbólico que passa por $\mathbf{0} \in H^3$ tem de ser um desses discos. Além disso, o bordo de cada disco de raio 1, centrado na origem, é um *círculo no infinito*, ou seja, um círculo dentro da esfera no infinito. Na Figura 4.6.2, mostramos dois planos hiperbólicos que passam pela origem. Uma observação interessante é que os círculos no infinito fazem o mesmo ângulo, na esfera no infinito, que o ângulo entre os planos. Desse modo, o conteúdo "angular" da geometria hiperbólica é refletido também na esfera no infinito.

[8] Usamos aqui as aspas porque essa esfera não faz parte do espaço H^3 e, portanto, não está incluída no domínio da função de distância, nem é algo que habitantes (desavisados) de H^3 sequer saibam que existe.

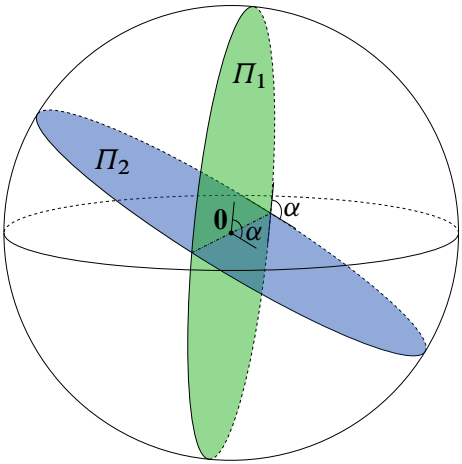


Figura 4.6.2: A bola de Poincaré com dois planos hiperbólicos Π_1 e Π_2, que passam pela origem $\mathbf{0}$. Do ponto de vista euclidiano, Π_1 e Π_2 são discos abertos centrados na origem. Seus bordos são círculos contidos na esfera no infinito $\partial_\infty H^3$. Embora esses círculos não sejam partes dos planos, eles determinam as possíveis direções assintóticas das geodésicas contidas nesses planos. Além disso, o ângulo α de interseção dos dois planos pode ser medido entre os "círculos no infinito" correspondentes.

Em particular, isometrias hiperbólicas preservam ângulos entre planos, então esperamos que elas preservem também os ângulos entre círculos na esfera no infinito, isto é, as isometrias hiperbólicas devem induzir transformações *conformes* da esfera S^2. Na seção seguinte, vamos desenvolver esse ponto de vista, mas indo no sentido oposto: vamos começar com uma descrição das transformações conformes da esfera no infinito, e depois associar uma isometria hiperbólica a cada tal transformação.

Mas antes disso, vamos descrever mais isometrias da bola de Poincaré. Consideremos uma esfera $E = S(p,r)$ em $\mathbb{R}^3$, centrada no ponto p, de raio r. A inversão ι_E em E, introduzida na Definição 1.4.1, é uma transformação conforme de $\mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$. Consequentemente, se E intersecta a esfera unitária S^2 perpendicularmente, então ι_E preserva S^2 e, portanto, preserva também a bola de Poincaré H^3, trocando as duas partes de H^3 separadas por E. Nos exercícios abaixo, vamos verificar que todas tais inversões são isometrias da geometria hiperbólica.

Exercícios 4.6.5. Sejam (x_1, x_2, x_3) coordenadas reais no espaço $\mathbb{R}^3$ que contém a bola de Poincaré. Como a bola de Poincaré tem simetria por todas as rotações ao redor da origem, que são isometrias hiperbólicas, vamos considerar apenas as esferas $E = S(p,r)$, onde $p = (p_1, 0, 0)$ e $p_1 > 1$.

a) Seja $E \subset \mathbb{R}^3$ a esfera $E = S(p,r)$ onde $p = (p_1, 0, 0)$ para qualquer $p_1 > 1$. Encontre o valor do raio $r = r(p_1)$ para qual E intersecta a esfera unitária S^2 perpendicularmente.

b) Escreva a fórmula da inversão ι_E na esfera $E = S(p, r)$, perpendicular a S^2, descrita no ponto anterior. Justifique por que ι_E preserva a bola de Poincaré.

c) Calcule a derivada da transformação ι_E do item anterior, ou seja, a matriz jacobiana de ι_E.

d) Para um ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in H^3$, use o resultado do Item b acima para calcular $\|\iota_E(\mathbf{x})\|^2$.

e) Utilizando os resultados dos itens acima, mostre que ι_E é uma isometria da geometria hiperbólica em H^3.

Como consequência dos exercícios acima, se $E \subset \mathbb{R}^3$ é uma esfera euclidiana perpendicular a $S^2 = \partial_\infty H^3$, então a restrição da inversão ι_E à bola de Poincaré é uma isometria hiperbólica. Notadamente, o conjunto de pontos fixos dessa restrição $\iota_E\big|_{H^3}$ é a calota esférica $E \cap H^3$. Isso implica que todas as calotas de esferas euclidianas perpendiculares a $\partial_\infty H^3$ são superfícies totalmente geodésicas em H^3, isto é, planos hiperbólicos. Os discos centrados em $\mathbf{0}$, que já descrevemos acima, podem ser considerados como um limite de tais calotas, quando o raio da esfera E aumenta para o infinito.

Em geral, a interseção de dois planos não paralelos é uma geodésica, o que mostra, no caso da bola de Poincaré, que todos arcos de círculos perpendiculares à $\partial_\infty H^3$ (em ambos os fins) são geodésicas hiperbólicas. Analogamente, os diâmetros da bola de Poincaré podem ser vistos como um exemplo especial disso, se consideramos retas euclidianas como "círculos de raio infinito".

A Figura 4.6.3 mostra alguns exemplos de geodésicas hiperbólicas e de planos hiperbólicos na bola de Poincaré. Em particular, todas as geodésicas mostradas na figura têm comprimento infinito, e cada plano tem área infinita.

Assim, chegamos a uma descrição explícita de linhas e planos hiperbólicos. A bola de Poincaré tem a vantagem que os ângulos euclidianos nela são iguais aos ângulos hiperbólicos, mas as distâncias são diferentes. Como um sumário de toda essa discussão, a Tabela 4.6.2 estabelece um pequeno dicionário que relaciona os termos usados comumente em geometria euclidiana aos seus equivalentes hiperbólicos, na bola de Poincaré. Obviamente, tais descrições podem ser desenvolvidas em outros modelos também, quer dizer, a língua hiperbólica tem muitos outros dialetos, que não discutiremos aqui. O dicionário da Tabela 4.6.2 facilita muito a resolução dos seguintes exercícios.

Exercícios 4.6.6. a) Mostre que, para qualquer plano hiperbólico Π e qualquer ângulo α, existe uma reta hiperbólica ℓ que faz o ângulo α com Π.

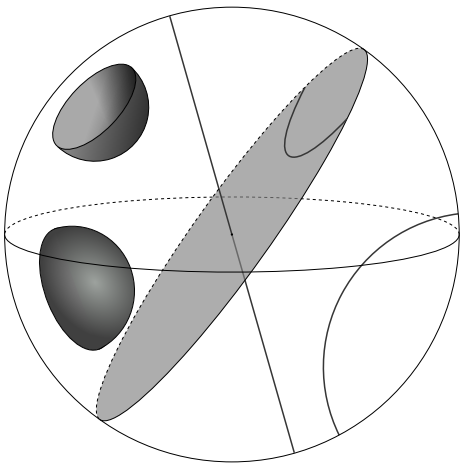


Figura 4.6.3: A bola de Poincaré H^3 com exemplos de linhas e planos hiperbólicos. As linhas geodésicas em H^3 são arcos de círculos euclidianos que intersectam a esfera no infinito perpendicularmente em ambos os seus fins, o que inclui, como um caso especial, os diâmetros da bola. Ao mesmo tempo, as superfícies totalmente geodésicas – os planos hiperbólicos – têm a forma de calotas de esferas euclidianas perpendiculares à esfera no infinito, ou discos contendo o centro da bola.

Noção geral	**Nome euclidiano**	**Nome hiperbólico**
3-variedade simétrica	$\mathbb{R}^3$	bola de Poincaré H^3
ponto	ponto	ponto
geodésica	linha reta	diâmetro da bola ou arco de um círculo euclidiano perpendicular a $\partial_\infty H^3$
superfície totalmente geodésica	plano	disco central ou calota esférica euclidiana perpendicular a $\partial_\infty H^3$
métrica riemanniana	produto escalar	métrica hiperbólica
distância riemanniana	distância euclidiana	distância hiperbólica

Tabela 4.6.2: Um dicionário que relaciona as noções mais básicas da geometria euclidiana àquelas da geometria hiperbólica tridimensional, modelada pela bola de Poincaré.

b) Mostre que, para qualquer plano hiperbólico Π_1 e qualquer ângulo α, existe um outro plano Π_2 que faz o ângulo α com Π_1.

c) Dois planos Π_1 e Π_2 são *paralelos* se ou $\Pi_1 = \Pi_2$ ou $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$. Verifique que, para qualquer plano hiperbólico Π e qualquer ponto $p \notin \Pi$, existe *um número infinito* de planos paralelos a Π que passam por p.

d) Como determinar se dois planos hiperbólicos se intersectam, olhando apenas para a esfera no infinito e os dois círculos determinados por esses planos?

e) Como detectar se um plano hiperbólico intersecta uma geodésica dada, olhando apenas para a esfera no infinito, na qual o plano e a geodésica determinam, respectivamente, um círculo e dois pontos (os "fins" da geodésica)?

4.6.2 Isometrias hiperbólicas e transformações conformes da esfera

Nesta seção, vamos falar um pouco sobre as transformações conformes da esfera bidimensional, ou seja, transformações que preservam os ângulos entre curvas em S^2. Depois, vamos explicar como essas transformações da 2-esfera, identificada à esfera no infinito $\partial_\infty H^3$, podem ser estendidas a toda a bola de Poincaré.

Na Seção 1.4.3, discutimos a projeção estereográfica da 2-esfera, uma transformação conforme que leva cada ponto da esfera, exceto o polo norte N, a um ponto do plano, como ilustrado na Figura 1.4.1. Como consequência, a projeção estereográfica estabelece uma identificação conforme entre a 2-esfera e a compactificação por um ponto do plano $\mathbb{C}$. Essa compactificação é normalmente denotada $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Como tudo isso já foi discutido no Capítulo 1, vamos apenas lembrar o que já foi dito. As transformações conformes de $\widehat{\mathbb{C}}$ foram descritas nas Seções 1.3.6 e 1.3.7, onde estudamos o grupo de transformações lineares fracionárias, ou seja, o grupo de funções da forma

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1. \qquad (4.6.4)$$

No Item e dos Exercícios 1.3.13, mostramos que transformações lineares fracionárias podem ser estendidas à compactificação $\widehat{\mathbb{C}}$, ou seja, à *esfera de Riemann*. Explicitamente, uma transformação f da forma (4.6.4) pode ser definida no ponto $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ por $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Além disso, vamos definir $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$. Assim, cada transformação linear fracionária torna-se uma bijeção holomorfa $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, com uma inversa holomorfa. O grupo de transformações lineares fracionárias foi

denotado TLF($\mathbb{C}$) e, no Item d dos Exercícios 1.3.14, mostramos que TLF($\mathbb{C}$) é isomorfo ao grupo projetivo PSL$(2,\mathbb{C})$, também conhecido como o grupo de Möbius.

Em particular, cada difeomorfismo $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ que preserva a orientação e que é conforme (preserva os ângulos) tem de ser um elemento de TLF($\mathbb{C}$) $\cong$ PSL$(2,\mathbb{C})$. Segundo o resultado dos Exercícios 1.3.14, cada $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ pode ser escrito como uma "$\pm$ matriz", ou seja, um elemento da forma

$$g = \pm \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ onde } ad - bc = 1.$$

O símbolo "$\pm$" refere-se ao fato de o grupo PSL$(2,\mathbb{C})$ ser definido como quociente do grupo SL$(2,\mathbb{C})$, de matrizes de determinante 1, pelo subgrupo $\{I, -I\}$, onde I denota a matriz de identidade. Em outras palavras, g é uma classe de congruência no grupo quociente, representada por uma matriz $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, na qual as entradas a, b, c, d são determinadas a menos de multiplicação conjunta por ± 1. Essas entradas determinam os coeficientes na transformação linear fracionária f definida pela Equação (4.6.4), que age na esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Usando a projeção estereográfica, podemos transportar essa ação à esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Ao compormos todas essas identificações, vemos que os elementos do grupo PSL$(2,\mathbb{C})$ agem na esfera no infinito $S^2 = \partial_\infty H^3$. Como as transformações lineares fracionárias são automorfismos conformes de $\widehat{\mathbb{C}}$ e a projeção estereográfica é um difeomorfismo conforme, cada elemento $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ determina assim um difeomorfismo conforme $\partial_\infty H^3 \to \partial_\infty H^3$.

Logo veremos que a ação de todo elemento $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ na esfera no infinito determina uma isometria de H^3 que preserva a orientação. Na verdade, todas as isometrias hiperbólicas que preservam a orientação têm essa forma, como enunciado no teorema que segue.

Teorema 4.6.7 (Teorema de extensão de Poincaré)**.** *As identificações descritas acima induzem um isomorfismo de grupos* PSL$(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Isom}^+(H^3)$.

Vamos agora descrever como construir a extensão de uma transformação conforme da esfera no infinito $\partial_\infty H^3$ a uma transformação de H^3. A observação essencial nesse raciocínio é a seguinte: cada círculo na esfera no infinito determina um único plano hiperbólico. No caso de círculos máximos em $S^2 = \partial_\infty H^3$, isso é claro: eles determinam discos centrais, ou seja, planos hiperbólicos que passam pela origem da bola. A observação que outros círculos em S^2 também determinam planos hiperbólicos únicos segue do exercício abaixo.

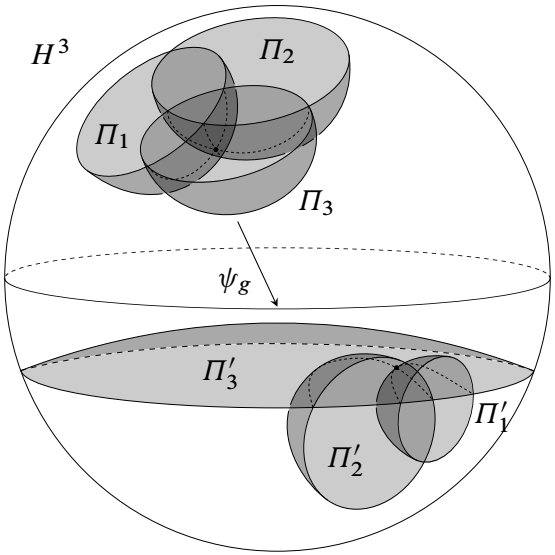


Figura 4.6.4: A extensão de Poincaré. Dado um ponto $p \in H^3$, podemos construir três planos hiperbólicos Π_1, Π_2 e Π_3, cuja interseção consiste apenas do ponto p. Esses planos são unicamente determinados pelos seus círculos no infinito. Dado um automorfismo conforme $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ da esfera no infinito, podemos encontrar as imagens desses três círculos sob g e formar três novos planos hiperbólicos Π'_1, Π'_2 e Π'_3 a partir dessas imagens (que são também círculos). Então, a imagem de p sob a extensão $\psi = \psi_g$ é o único ponto de interseção dos três planos Π'_i, $i \in \{1,2,3\}$.

Exercício 4.6.8. Este exercício refere-se à geometria euclidiana de $\mathbb{R}^3$ e usa somente vocabulário euclidiano. Mostre que para cada círculo $C \subset S^2 \subset \mathbb{R}^3$ existe uma única esfera $S(p,r) \subset \mathbb{R}^3$, centrada num ponto $p \in \mathbb{R}^3$, de raio $r > 0$, que intersecta a esfera unitária S^2 perpendicularmente ao longo de C.

Seja g qualquer elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Como explicamos acima, g age na esfera S^2 por transformações conformes e, em particular, leva círculos em S^2 a outros círculos. O nosso objetivo é associar a g uma isometria hiperbólica $\psi = \psi_g \in \mathrm{Isom}^+(H^3)$. Para qualquer ponto p na bola de Poincaré, podemos encontrar três planos hiperbólicos Π_1, Π_2 e Π_3, em posição geral, cuja interseção consiste apenas do ponto p, ou seja, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \{p\}$. Essa situação é mostrada na parte superior da bola de Poincaré na Figura 4.6.4. Cada um desses planos Π_i determina (e é determinado por) um único círculo $C_i \subset \partial_\infty H^3$, $i \in \{1,2,3\}$. A transformação de Möbius g leva os círculos C_1, C_2 e C_3 a novos círculos C'_1, C'_2 e C'_3, respectivamente. Seja Π'_i o plano determinado pelo círculo $C'_i = g(C_i)$ para cada i, como ilustrado na parte inferior da Figura 4.6.4. A imagem do ponto p sob a isometria $\psi = \psi_g$ é definida como o único ponto de

interseção dos novos planos:

$$\{\psi(p)\} = \Pi_1' \cap \Pi_2' \cap \Pi_3'.$$

Assim, cada automorfismo conforme $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ determina uma transformação da bola de Poincaré em si mesma, embora seja necessário algum trabalho para mostrar que a imagem $\psi(p)$ do ponto p não depende da escolha dos planos Π_1, Π_2 e Π_3, ou seja, que a transformação ψ como a definimos está, de fato, bem definida. Depois disso, é necessário provar que ψ é uma isometria da geometria hiperbólica, o que não faremos aqui. Entretanto, já podemos observar que ψ leva planos hiperbólicos a planos hiperbólicos e geodésicas a geodésicas. O exercício abaixo mostra que ψ preserva também os ângulos entre planos hiperbólicos.

Exercício 4.6.9. Este exercício usa somente terminologia euclidiana. Sejam C_1 e C_2 dois círculos dentro da esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e sejam E_1, E_2 as esferas que intersectam S^2 perpendicularmente ao longo de C_1 e C_2, respectivamente, cuja existência e unicidade seguem do Exercício 4.6.8. Supondo que C_1 e C_2 têm dois pontos de interseção, mostre que o ângulo de interseção entre C_1 e C_2 é igual ao ângulo de interseção entre E_1 e E_2.

No Item a dos Exercícios 4.6.2, mostramos que as rotações da bola de Poincaré ao redor da origem constituem exemplos de isometrias hiperbólicas. Na verdade, elas podem ser descritas como rotações de H^3 ao redor de eixos hiperbólicos, isto é, diâmetros da bola de Poincaré. Uma outra classe importante de isometrias que preservam orientação são as translações ao longo de geodésicas. Então, vamos concluir esta seção com uma discussão de *translações hiperbólicas*. Como um exemplo, podemos considerar a geodésica ℓ formada pelo eixo vertical da bola de Poincaré. Uma translação ao longo de ℓ é ilustrada na Figura 4.6.5, e podemos supor, para maior simplicidade, que ela move ℓ pela distância 1. Denotemos essa translação por $\tau(\ell, 1)$. O nosso objetivo é encontrar o elemento $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tal que $\tau(\ell,1) = \psi_g$. Como é claro, para fazer isso, devemos pensar sobre a ação das transformações de Möbius na esfera no infinito e encontrar a transformação cuja extensão de Poincaré é a isometria $\tau(\ell, 1)$.

A parametrização da esfera pelos elementos de $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vem da projeção estereográfica, ilustrada na Figura 1.4.1. Em particular, a imagem do polo norte da esfera é $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, a imagem do polo sul sendo $0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Consequentemente, a geodésica ℓ tem as direções assintóticas determinadas pelos pontos $0, \infty \in \widehat{\mathbb{C}} \cong \partial_\infty H^3$. Isso já nos diz algo sobre a transformação de Möbius g: para a isometria ψ_g preservar ℓ, g tem de fixar os pontos $0, \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$.

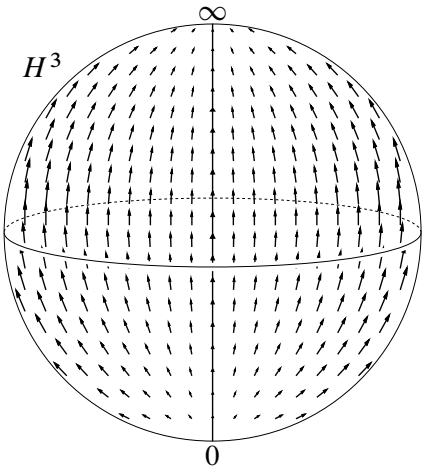


Figura 4.6.5: Uma translação hiperbólica, no modelo da bola de Poincaré. O eixo da translação mostrada na figura é o diâmetro vertical da bola. A imagem mostra o movimento de pontos no plano hiperbólico formado pelo disco euclidiano paralelo ao plano da página. Graças à simetria por rotações, a imagem é a mesma em cada plano hiperbólico que contém o eixo vertical.

Exercícios 4.6.10. a) Mostre que cada transformação de Möbius f que fixa os elementos 0 e ∞ de $\widehat{\mathbb{C}}$ tem a forma $f(z) = \lambda z$ para um escalar $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Dica:* Utilize a forma de f dada na Equação (4.6.4).

b) Seja g a transformação de Möbius para a qual $\psi_g = \tau(\ell, 1)$. O resultado do item anterior diz que $g(z) = \lambda z$ para certo parâmetro λ. Usando as propriedades da projeção estereográfica, mostre que λ é um número real positivo.

Graças ao exercício acima, sabemos que a translação $\tau(\ell, 1)$ corresponde a uma transformação de Möbius da forma $g(z) = \lambda z$ para um certo número $\lambda > 0$. Para encontrar o valor de λ, temos de estudar dois círculos no infinito relacionados pela translação $\tau(\ell, 1)$. Para tornar tudo isso mais concreto, podemos introduzir coordenadas reais (x_1, x_2, x_3) no espaço $\mathbb{R}^3$ em que H^3 vive, imaginando que $\ell = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = 0,\ -1 < x_3 < 1\}$. Então, a translação $\tau(\ell, 1)$ move todos os pontos de ℓ na direção de x_3 positivo, pela distância hiperbólica 1. Por exemplo, seja Π o plano hiperbólico que intersecta ℓ perpendicularmente no centro da bola de Poincaré. Aos nosso olhos euclidianos, Π é o disco equatorial – horizontal – da bola H^3. A imagem de Π sob a translação $\tau(\ell, 1)$ é, portanto, um plano hiperbólico Π' que intersecta ℓ perpendicularmente em um ponto $B = (0, 0, b)$ que fica à distância hiperbólica 1 da origem. Em termos euclidianos, Π' é uma calota de uma esfera euclidiana bidimensional, cujo raio e centro vamos determinar nos exercícios abaixo.

Exercícios 4.6.11. a) Trabalhando na bola de Poincaré, considere o ponto $B = (0, 0, b) \in H^3$ que resulta da translação hiperbólica da origem $\mathbf{0}$ ao longo

do eixo x_3, na direção de x_3 positivo, pela distância hiperbólica 1. Encontre o valor de b usando os cálculos do Item b dos Exercícios 4.6.4.

b) Seja r o raio da esfera euclidiana em $\mathbb{R}^3$ cuja interseção com a bola de Poincaré é o plano Π' descrito acima. Em outras palavras, r é o raio da única esfera em $\mathbb{R}^3$ que intersecta a esfera unitária perpendicularmente e intersecta o eixo x_3, também perpendicularmente, no ponto $B = (0, 0, b)$ do item anterior. Mostre que $r = 1/\sinh(1)$.

Assim, sabemos tudo que é necessário para encontrar λ, embora os cálculos exatos possam levar ao desespero as pessoas de coração fraco. Entretanto, a ideia geral desses cálculos é simples: aos planos hiperbólicos Π e Π' correspondem os círculos no infinito C e C', respectivamente. Já sabemos que C é o "equador" da bola de Poincaré: $C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\}$, e com ajuda do Item b dos exercícios acima, podemos também encontrar C'. Consequentemente, as imagens dos círculos C e C' sob a projeção estereográfica $\partial_\infty H^3 \to \widehat{\mathbb{C}}$ são dois círculos concêntricos $\{|z| = R\}$ e $\{|z| = R'\}$, respectivamente. Finalmente, podemos calcular λ como a razão dos raios desses círculos: $\lambda = \frac{R'}{R}$. Se a leitora dedicada fizer todos esses cálculos, vai descobrir que $\lambda = e$. Mais geralmente, a translação $\tau(\ell, c)$ pela distância c, na direção de ∞, corresponde à transformação de Möbius $z \mapsto e^c z$.

4.7 Variedades hiperbólicas

Esta seção é devotada a alguns exemplos de *variedades hiperbólicas,* ou seja, $(X, \mathcal{G})$-variedades com $X = H^3$, onde o pseudogrupo $\mathcal{G}$ é igual ao pseudogrupo $\mathcal{H}$ de isometrias hiperbólicas locais. Exatamente como no caso de variedades esféricas, as $(H^3, \mathcal{H})$-variedades também podem ser construídas por colagem de poliedros – hiperbólicos – desde que se satisfaçam as Condições 4.4.4. Na verdade, já encontramos, no Capítulo 3, todas as variedades consideradas aqui, embora lá as tenhamos analisado apenas do ponto de vista topológico.

4.7.1 O espaço dodecaédrico de Seifert–Weber

O espaço dodecaédrico de Seifert–Weber foi introduzido, na Seção 3.1.3, como uma colagem de faces opostas de um dodecaedro, efetuada por "movimentos de parafuso" que rodam cada face pelo ângulo $\frac{3}{5}\pi$, além da transladar ao plano da face oposta. No Exercício 3.1.16, pedimos que o leitor estabeleça as propriedades

básicas dessa colagem e da variedade resultante, o espaço dodecaédrico de Seifert–Weber. Se a leitora ainda não resolveu esse exercício, é importante que o faça agora: do contrário, a discussão que segue será quase incompreensível.

Como verificado no Exercício 3.1.16, a definição do espaço dodecaédrico de Seifert–Weber por colagem das faces opostas do dodecaedro, com a rotação das faces coladas pelo ângulo $\frac{3}{5}\pi$, satisfaz os pontos i e iii das Condições 4.4.4. No que segue, bastará então que construamos um dodecaedro geométrico que satisfaça também a condição ii. Conforme o resultado do Exercício 3.1.16, a colagem agrupa as arestas do dodecaedro em grupos de cinco, então as equações de colagem estão satisfeitas se (e somente se) o ângulo diedral do dodecaedro é igual a $\frac{2\pi}{5} = 72°$. Porém, como verificado nos Exercícios 4.5.3, isso não é possível nem na geometria euclidiana, onde o ângulo diedral é sempre $\delta \approx 116,565°$, nem na geometria esférica, onde o ângulo diedral sempre ultrapassa δ. No entanto, é possível construir um dodecaedro regular *hiperbólico* com o ângulo diedral de 72°: vejamos agora como fazê-lo.

Seja $V_1 \subset S^2$ o conjunto de vértices de um dodecaedro regular euclidiano inscrito na esfera unitária. O conjunto $V_r = r \cdot V_1$ contém, então, os vértices de um dodecaedro inscrito na esfera $S(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{R}^3$. No Item a dos Exercícios 4.6.4, mostramos que a esfera euclidiana $S(\mathbf{0}, r)$, com $r < 1$, é também uma esfera hiperbólica, embora o raio hiperbólico de $S(\mathbf{0}, r)$ não seja igual ao raio euclidiano r. Na verdade, quando $r \to 1$, o raio hiperbólico de $S(\mathbf{0}, r)$ diverge para o infinito. Seja D_r o *dodecaedro hiperbólico* cujos vértices são os elementos do conjunto V_r, para $r \in (0, 1)$. Em outras palavras, D_r é o menor subconjunto geodesicamente convexo de H^3 que contém V_r, também conhecido como a *envoltória convexa geodésica* de V_r. Em particular, as faces de D_r são pentágonos hiperbólicos, ou seja, regiões de planos hiperbólicos limitadas por cinco arestas, cada uma das quais é um segmento de uma geodésica hiperbólica. Analogamente ao caso de dodecaedros esféricos, discutido em detalhe na Seção 4.5.2, o ângulo diedral δ_r do dodecaedro hiperbólico D_r também depende continuamente do parâmetro r. Quando $r \to 0$, δ_r aproxima-se ao ângulo diedral δ num dodecaedro euclidiano – a prova disso é praticamente idêntica à prova que fizemos no caso esférico e que foi ilustrada pela Figura 4.5.3.

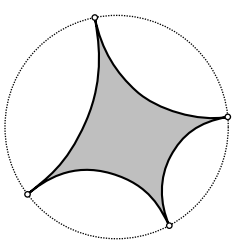


Figura 4.7.1: Um polígono ideal hiperbólico.

No entanto, a situação em H^3 é diferente quando $r \to 1$, ou seja, quando o raio hiperbólico da esfera que contém D_r diverge para o infinito. No limite, o

Figura 4.7.2: O dodecaedro hiperbólico D_{r^*}, no modelo da bola de Poincaré. Os ângulos diedrais de D_{r^*} são exatamente iguais a $\frac{2}{5}\pi = 72°$, permitindo a colagem geométrica, que define a estrutura hiperbólica na 3-variedade resultante – o espaço dodecaédrico de Seifert–Weber.

dodecaedro D_1 pode ser inscrito na esfera no infinito $S^2 = \partial_\infty H^3$, o que coloca os "vértices" de D_1 fora da bola de Poincaré. Topologicamente, $D_1 \subset H^3$ é um dodecaedro sem vértices – um *dodecaedro ideal*.

Em geral, um *poliedro ideal* é uma região de H^3 limitada por um número finito de *polígonos ideais,* que têm "vértices no infinito". As arestas de polígonos ideais são geodésicas infinitas, assintóticas uma a outra, de forma que elas formem um ciclo fechado, limitando, assim, uma região não compacta de um plano hiperbólico, como ilustrado na Figura 4.7.1. Um exemplo de poliedro ideal – um tetraedro ideal – é também mostrado na Figura 4.7.3. No nosso caso, o dodecaedro regular ideal D_1 tem pentágonos ideais como suas faces. O cálculo do ângulo diedral δ_1 de D_1, que não faremos aqui, mostra que $\delta_1 = \frac{\pi}{3} = 60°$. Consequentemente, o limite, quando $r \to 1$, do ângulo diedral hiperbólico δ_r é igual a $\frac{\pi}{3}$.

Como $60° < 72° < 116,565° \approx \delta$, podemos aplicar o teorema do valor intermediário à função contínua $r \mapsto \delta_r$, concluindo, assim, que existe um valor $r^* \in (0,1)$ para o qual $\delta_{r^*} = \frac{2}{5}\pi = 72°$. Desse modo, obtemos um dodecaedro hiperbólico muito especial D_{r^*}, com ângulos diedrais de exatamente $\frac{2}{5}\pi$ ao longo de todas as arestas, ilustrado na Figura 4.7.2. Assim, a colagem do dodecaedro D_{r^*} satisfaz as equações de colagem. Em conjunção com o resultado do Exercício 3.1.16, isso implica que o espaço dodecaédrico de Seifert–Weber tem a estrutura de uma variedade hiperbólica.

Além disso, o ângulo δ_r é uma função estritamente decrescente do parâmetro r, o que faz o dodecaedro hiperbólico D_{r^*} único, a menos de congruência (isometria). Consequentemente, a $(H^3, \mathcal{H})$-estrutura no espaço dodecaédrico de Seifert–Weber é também única, implicando que todas as propriedades dessa única

geometria hiperbólica constituem invariantes topológicos da variedade.

Em geral, se uma 3-variedade compacta M, sem bordo, admite uma estrutura hiperbólica, ou seja, se M é uma $(H^3, \mathcal{H})$-variedade, então essa estrutura é única – todas outras maneiras de introduzir geometria hiperbólica em M produzem variedades isométricas à variedade original. Esse fato é conhecido como o *teorema de rigidez de Mostow*, que não discutiremos, mas que pode ser encontrado, com prova completa, no livro de Benedetti e Petronio (1992).

4.7.2 O complemento do nó figura oito

Vamos finalizar as nossas investigações com um exemplo de grande importância histórica, que foi descrito completamente pela primeira vez por W. Thurston. Já mencionamos esse exemplo na Seção 3.1.3, onde discutimos uma colagem de dois tetraedros topológicos, conforme as instruções mostradas no lado direito da Figura 3.1.9. Como confirmamos ao resolver o Exercício 3.1.18, essa colagem de tetraedros tem característica de Euler igual a 1 e, portanto, não define uma 3-variedade. Esperamos que o leitor já tenha identificado a causa desse problema: o elo do único vértice, que resulta da colagem de todos os vértices dos dois tetraedros, é um toro bidimensional T^2, ao invés de uma esfera. Consequentemente, esse vértice não possui uma vizinhança compacta que seja homeomorfa a uma bola fechada, pois as pequenas vizinhanças do vértice são todas homeomorfas ao cone $C(T^2)$.

Na Seção 3.1.3, dissemos também que podemos simplesmente remover o vértice problemático, produzindo, assim, uma 3-variedade M *aberta*, isto é, a variedade M não é compacta. Na verdade, M é homeomorfa ao complemento do nó figura oito. Mais precisamente, seja K uma curva fechada, suavemente mergulhada em $\mathbb{R}^3$, na forma do nó mostrado na Figura 3.1.10. Podemos considerar esse $\mathbb{R}^3$ como um subconjunto aberto da 3-esfera S^3, já que S^3 é a compactificação por um ponto de $\mathbb{R}^3$. O que Thurston descobriu é que a variedade M é homeomorfa a $S^3 \setminus K$, o que não vamos justificar aqui; uma prova simples e detalhada desse fato pode ser encontrada no Capítulo 11 do livro de Bonahon (2009).

Para equipar a variedade não compacta M com uma geometria, vamos realizar os dois tetraedros como tetraedros geométricos e colar suas faces por isometrias, como já fizemos em outros casos. No entanto, uma diferença marcante nesse caso é que os vértices dos tetraedros precisam ser removidos, criando um risco de que um ser humano hiperbólico, ao viajar pela variedade M, possa encontrar um "buraco" perigoso, no lugar do ponto removido. Em termos matemáticos, ao removermos um ponto de um espaço métrico completo (provavelmente) obtemos um espaço não completo: qualquer sequência convergindo para o ponto removido (supondo

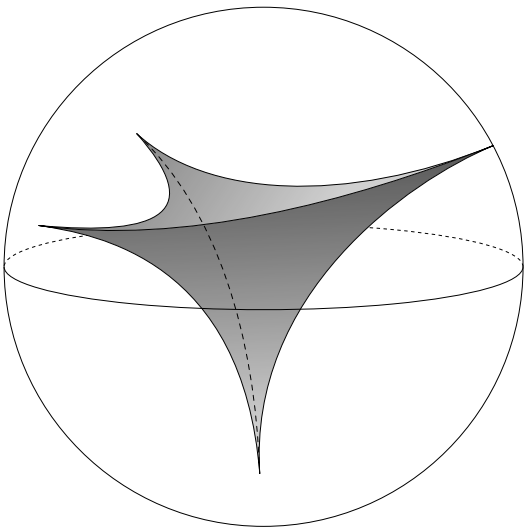


Figura 4.7.3: Um tetraedro regular ideal hiperbólico, cujos vértices são também vértices de um tetraedro regular euclidiano inscrito na esfera unitária $S^2 = \partial_\infty H^3$. Topologicamente, o tetraedro ideal hiperbólico é um tetraedro sem vértices. Geometricamente, ele é definido como a região de H^3 limitada por quatro planos hiperbólicos, que se intersectam ao longo de seis geodésicas infinitas – as arestas. Cada vértice no infinito determina a direção assintótica comum de três arestas. Apesar de ser não compacto, um tetraedro ideal hiperbólico tem volume finito.

que haja tais sequências não constantes) continua a ser uma sequência de Cauchy, mas deixa de convergir. Para evitar essa dificuldade, vamos realizar os dois tetraedros sem vértices como *tetraedros ideais hiperbólicos*, com "vértices no infinito". Assim, não haverá um "buraco", pois ele estará "infinitamente afastado".[9]

Um tetraedro ideal hiperbólico, ilustrado na Figura 4.7.3, é completamente determinado por quatro pontos na esfera no infinito $S^2 = \partial_\infty H^3$ – seus vértices no infinito. Quando esses quatro pontos são vértices de um tetraedro euclidiano regular inscrito em S^2, então o tetraedro ideal correspondente, na bola de Poincaré, é chamado de *tetraedro regular ideal*. Em particular, os ângulos diedrais num tetraedro regular ideal são todos iguais a $\frac{\pi}{3} = 60°$.

Vamos agora efetuar a colagem mostrada na Figura 3.1.9 usando dois tetraedros regulares ideais. Olhando a figura, vemos que a colagem agrupa as arestas em duas famílias de seis arestas cada, então a soma de ângulos diedrais nas arestas de tetraedros regulares ideais identificadas pela colagem será sempre igual a $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$. No entanto, para justificar que M é uma $(H^3, \mathcal{H})$-variedade, não podemos simplesmente aplicar as Condições 4.4.4, porque estamos lidando aqui com uma colagem de poliedros ideais – não compactos. Como veremos logo, em um tetraedro ideal Δ, para cada aresta que separa duas faces F_1, F_2 de Δ, existe uma

[9] Essa estratégia, ao invés de fornecer os limites faltantes de sequências de Cauchy, simplesmente faz com que essas sequências deixem de ser Cauchy e divirjam para o infinito.

única isometria hiperbólica $f \in \mathrm{Isom}^+(H^3)$, que preserva essa aresta (orientada) e leva F_1 a F_2. Porém, ainda não sabemos se a composição de tais isometrias f, ao redor da aresta colada, induz nela a identidade, como foi postulado na Figura 3.3.8. Mesmo com a soma de ângulos igual a 2π, o que pode ocorrer é que a composição $f_6 \circ \cdots \circ f_1$ aja como uma translação ao longo da aresta, já que ela é uma geodésica infinita. Felizmente, no caso da nossa colagem, quando usamos tetraedros regulares ideais, isso não acontece: todas as isometrias f_i são rotações, como vamos verificar agora.

Exercícios 4.7.1. a) Considere, na esfera de Riemann, duas coleções de três pontos distintos: $p_1, p_2, p_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ e $p_1', p_2', p_3' \in \widehat{\mathbb{C}}$. Mostre que existe uma única transformação de Möbius $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, que satisfaz $g(p_i) = p_i'$ para todo $i \in \{1,2,3\}$.

b) Como um exemplo concreto da construção do item anterior, encontre a transformação de Möbius que faz $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto 0$.

c) Conclua do Item a que, para cada par de faces F_1, F_2 de um tetraedro ideal hiperbólico Δ, existe uma única isometria $f \in \mathrm{Isom}^+(H^3)$ que leva F_1 isometricamente a F_2 e cuja restrição à aresta $F_1 \cap F_2$ é uma isometria dessa aresta que preserva orientação.

d) Seja Δ um tetraedro *regular* ideal em H^3. Mostre que, para qualquer par de faces F_1, F_2, a única isometria f construída no item anterior é uma rotação, ou seja, que f fixa a aresta $F_1 \cap F_2$ ponto a ponto.

Como consequência dos exercícios acima, a nossa colagem de dois tetraedros regulares ideais induz uma estrutura hiperbólica – uma $(H^3, \mathcal{H})$-estrutura – no complemento M do nó figura oito, com o nó "no infinito". Além disso, a variedade hiperbólica M tem volume finito, igual ao volume dos dois tetraedros ideais.

Em geral, para que uma colagem de tetraedros ideais hiperbólicos, por meio de isometrias que preservam orientação, produza uma variedade hiperbólica, têm de se satisfazer as *equações complexas de colagem hiperbólica*. Mais precisamente, identificando $\partial_\infty H^3$ com $\widehat{\mathbb{C}}$ e aplicando o Item a dos Exercícios 4.7.1, podemos transformar qualquer tetraedro ideal Δ em um tetraedro ideal que tem três vértices nos pontos $\{0, 1, \infty\} \subset \partial_\infty H^3$. Assim, o quarto vértice acaba sendo um número complexo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, chamado o *parâmetro de forma* do tetraedro ideal Δ. O parâmetro de forma não é único, porque existem três maneiras de mover os três vértices iniciais aos pontos $0, 1, \infty$, que resulta em três parâmetros de

forma correspondentes: z, $\frac{1}{1-z}$ e $\frac{z-1}{z}$, que pode ser verificado usando o Item b dos Exercícios 4.7.1.

Se a leitora diligente aplica o resultado do Item c dos Exercícios 4.7.1 ao tetraedro ideal com vértices $\{0, 1, z, \infty\} \subset \partial_\infty H^3$, tomando $F_1 = (0, 1, \infty)$ e $F_2 = (0, z, \infty)$, vai descobrir que a transformação de Möbius f é dada pela fórmula $f(w) = zw$. Desse modo, a nossa análise da composição das isometrias hiperbólicas f_i, que relacionam as faces adjacentes dos dois tetraedros colados na construção de M, pode ser expressa em termos de equações em variáveis complexas: os parâmetros de forma dos dois tetraedros. Em particular, os ângulos diedrais de um tetraedro ideal correspondem aos argumentos (complexos) dos parâmetros de forma, enquanto as distâncias de translações induzidas nas arestas coladas são logaritmos de valores absolutos desses parâmetros.

Uma das consequências da análise de equações de colagem complexas é que, ao contrário do exemplo do espaço dodecaédrico de Seifert–Weber construído na Seção 4.7.1, a estrutura hiperbólica em $M \cong S^3 \setminus K$ não é única: na verdade, ela pode ser "deformada". Mais concretamente, deformações da geometria hiperbólica de M podem ser descritas por meio de deformações dos dois tetraedros ideais hiperbólicos – para fazer isso, deixamos os seus parâmetros de forma variar, de modo que as equações complexas de colagem continuem satisfeitas. Embora seja possível construir assim um número infinito de possíveis estruturas hiperbólicas diferentes em M, uma delas é especial: ela tem a propriedade de induzir uma distância riemanniana (hiperbólica) que faz M um espaço métrico *completo*. Em geral, o *teorema de rigidez de Mostow–Prasad* garante que, se uma 3-variedade não compacta M admite uma geometria hiperbólica metricamente completa, de volume finito, então essa geometria é a única $(H^3, \mathcal{H})$-estrutura em M com essas duas propriedades. No caso do complemento M do nó figura oito, a única estrutura completa corresponde à nossa colagem de dois tetraedros regulares, com parâmetros de forma $z = \frac{1}{1-z} = \frac{z-1}{z} = e^{i\pi/3}$.

Bibliografia

L. V. Ahlfors (1971). *Análisis de variable compleja: introducción a la teoría de funciones analíticas de una variable compleja*. Colección Ciencia y Técnica. Tradução do original em Inglês em Ahlfors (1978). Madrid: Aguilar (ver p. 234).

— (1978). *Complex analysis: An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 3ª ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. Traduzido para o Espanhol em Ahlfors (1971). New York: McGraw-Hill Book Co., pp. xi+331. MR: 510197. Zbl: 0395.30001 (ver pp. 20, 234).

A. F. Beardon (1995). *The geometry of discrete groups*. Vol. 91. Graduate Texts in Mathematics. Corrected reprint of the 1983 original. Springer-Verlag, New York, pp. xii+337. MR: 1393195 (ver p. 215).

R. Benedetti e C. Petronio (1992). *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitext. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, pp. xiv+330. MR: 1219310. Zbl: 0768.51018 (ver pp. 215, 230).

F. Bonahon (2009). *Low-Dimensional Geometry: From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots*. Vol. 49. Student Mathematical Library, IAS/Park City Mathematical Subseries. Providence, RI: American Mathematical Society, p. 384. MR: 2522946. Zbl: 1176.57001 (ver p. 230).

C. Carathéodory (1954a). *Funktionentheorie, Band I*. 2ª ed. Vol. 8. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe. Traduzido para o Inglês em Carathéodory (1954b). Basel: Birkhäuser, pp. iv+288. MR: 0130345 (ver p. 235).

— (1954b). *Theory of functions of a complex variable, Vol. 1*. Traduzido por F. Steinhardt do original em Alemão em Carathéodory (1954a). New York, NY: Chelsea Publishing Co., pp. xiii+301. MR: 0060009. Zbl: 0055.30301 (ver pp. 20, 234).

M. P. do Carmo (1988). *Geometria Riemanniana*. 4ª ed. Vol. 10. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, pp. vi+299. MR: 0651516 (ver pp. 165, 183, 213).

W. S. Massey (1991). *A basic course in algebraic topology*. Vol. 127. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, pp. xvi+428. MR: 1095046. Zbl: 0725.55001 (ver pp. 94, 124, 160).

J. R. Munkres (1984). *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, pp. ix+454. MR: 755006. Zbl: 0673.55001 (ver p. 135).

— (2000). *Topology*. 2ª ed. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, p. 537. MR: 3728284. Zbl: 0951.54001 (ver pp. 94, 124, 160).

H. Poincaré (1900). "Second Complement a l'Analysis Situs". *Proc. Lond. Math. Soc.* 32, pp. 277–308. MR: 1576227 (ver p. 103).

— (1904). "Cinquième complément à l'analysis situs". *Rend. Circ. Mat. Palermo* 18, pp. 45–110 (ver p. 103).

J. G. Ratcliffe (2019). *Foundations of hyperbolic manifolds*. 3ª ed. Vol. 149. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, p. 800. MR: 4221225 (ver p. 215).

K. Reidemeister (1935). "Homotopieringe und Linsenräume". *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 11 (1), pp. 102–109. MR: 3069647. Zbl: 0011.32404 (ver pp. 203, 207).

B. Riemann (1868). "Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13, pp. 133–150. MR: 3525305. Zbl: 01.0022.02 (ver p. 165).

W. P. Thurston (1997). *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. Vol. 35. Princeton Mathematical Series. Edited by Silvio Levy. Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. x+311. MR: 1435975. Zbl: 0873.57001 (ver pp. 5, 18, 60, 87, 215).

J. R. Weeks (2002). *The shape of space*. 2ª ed. Vol. 249. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, Inc., pp. xiv+382. MR: 1875835. Zbl: 1030.57001 (ver p. 5).

Índice Remissivo

álgebra, 45, 46, 50
anel, 45, 46
    de divisão, 47
ângulo
    cônico, 125, 126
    diedral, 200
    entre vetores, 33, 165
atlas
    folheado, 121
    $\mathcal{G}$-, 115
    $(X, \mathcal{G})$-, 195
automorfismo, 77
ação
    errante, 155
    livre, 155
    propriamente descontínua, 157

base de topologia, 115
bola esférica, 192

campos vetoriais invariantes, 78, 79
característica de Euler, 106, 139
carta, *veja* atlas
centro, 50
codimensão, 29
colagem
    boa, 142
    geométrica, 200
compactificação por um ponto, 11, 19, 28, 35
comprimento de curvas em $\mathbb{R}^n$, 165
cone, 125, 230
conexidade simples, 159
conformalidade, 16, 33, 213, 214
conforme, *veja* conformalidade
conjugação, 51
conjunto
    convexo, *veja* convexidade
    de nível, 174
    fundamental, 112
contrátil, 161

convexidade, 136, 210
    geodésica, 210, 228
curvatura, 213
cálculo de variações, 184
círculo
    de Apolônio, 38, 63
    de Hopf, *veja* fluxo de Hopf, órbitas
    de Villarceau, 60
    máximo, 57, 62, 86, 185, 187
    no infinito, 218

decomposição, 94
    ortogonal, 180
derivada, 127
desigualdade triangular, 176
disco esférico, 192
distância, 176
    riemanniana, 175, 179
dodecaedro, 102, 207

elo, 149, 230
enlace de Hopf, 64
equações de colagem, 199, 201
    complexas, 232
equivalência
    relação de, 94
esfera
    de Riemann, 119, 222
    homológica, 103
    máxima, 190
    no infinito, 218
espaço dodecaédrico
    de Poincaré, 102, 207
    de Seifert–Weber, 102, 105, 227
espaço lenticular, 105, 203, 204
espaço projetivo, 100
espaço tangente, 68, 72, 85, 132, 165, 173, 175, 180
espaço topológico, 11
esqueleto, 136
exponencial, 72–76, 187

fecho, 11
fibra, 128
fibrado tangente, 85, 128, 130
fibração de Hopf, 57, 59, 86, 87
fluxo, 55
fluxo de Hopf, 55–57, 59, 86
    órbitas, 56, 57, 59, 86, 87
folha, 121
folheação, 120, 121
forma hermitiana, 51, 52
fórmula de Euler, 25

$\mathcal{G}$-compatível, *veja* atlas, $\mathcal{G}$-
$\mathcal{G}$-geodésica, 182–184, 186–190
$\mathcal{G}$-estrutura, 119
$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, 23
gradiente, 173
graus de liberdade, 76
grupo
    fundamental, 103
    icosaédrico binário, 103
    ação de, 77
    modular, 111
    perfeito, 103

Hamilton, William R., 84
Hausdorff, 98, 115
homeomorfismo, 11
homotopia, 159

inversão, 14, 15, 17, 30, 61
isometria, 166, 167, 171, 180, 188
    local, 194

lente esférica, 203

Lie
    colchete de, 68
    grupo de, 66, 68, 72, 78, 84, 85
    álgebra de, 68, 69, 72–74, 78, 79, 84, 85

matriz
    jacobiana, 127
    ortogonal, 33, 170, 180
    unitária, 52, 53
medida de Lebesgue, 117
mergulho, 128, 129
metrizável, 98
métrica riemanniana, 165, 176
Möbius
    grupo de, 27, 223

núcleo, 69, 70
números complexos, 20, 42
    conjugação, 24
    módulo, 25
    parte imaginária, 24
    parte real, 24

O(n), 33, 171, 180
órbita
    G-, 112, 153

paralelizabilidade, 85, 134
parametrização pelo comprimento de arco, 183
partição, 94
parâmetro de forma, 232
placa, 121
poliedro, 200
    de complexo simplicial, 136
    ideal, 229
ponto no infinito, 9
posto, 128
potência, 16
produto escalar, 33, 52, 168, 175
    complexo, *veja* forma hermitiana
projetivo
    espaço complexo, 88–90
    espaço real, 70
projeção estereográfica, 12, 18, 19, 28, 35, 57, 60, 222
pseudogrupo, 114
PSL(2, $\mathbb{C}$), 24

quaterniões, *veja* quatérnios
quatérnios, 45–50
    aplicações de, 76
    conjugado, 48
    decomposição real, 46
    forma polar, 49
    formas notacionais, 47
    inverso, 48
    norma, 48–50
    parte real, 47
    puros, 48–50, 68, 69, 72
    reais, 48, 68
    unitários, 51, 53, 66, 68, 77, 79–81, 84
quociente, 95
    topologia, 95

recobrimento, 151
    grupo de, 151
    duplo, 76
    espaço de, 151
    regular, 153
    transformação de, 151
    universal, 160
reparametrização, 178, 183
representação adjunta, 68–70, 75, 76
rigidez, 206

rotação, 25, 28, 31, 193

scs, *veja* semicontinua superior
Seifert–Weber, *veja* espaço dodecaédrico
semicontínua superior, decomposição, 95
separável, 98
sequência exata, 70
SL(2, $\mathbb{C}$), 23
SO(2), 43
SO(n), 34, 180
superfície
  de Riemann, 122, 124
  totalmente geodésica, 189

tetraedro ideal, 231, 232
  regular, 231
TLF($\mathbb{C}$), 22, 222
toro
  de Hopf, 59
  tridimensional, 100, 195–199
transformação
  linear fracionária, 22, 222
  ortogonal, 31, 33, 69, 71, 77, 79–81
translação, 171, 172, 193, 196, 225
transposição, 34, 43, 51
triângulo esférico, 190
troca de coordenadas, 115

variedade, 114
  diferenciável, 115
  $\mathcal{G}$-, 115
  homogênea, 167
  isotrópica, 167
  localmente isometricamente mergulhada em $\mathbb{R}^n$, 176
  riemanniana, 166
  simétrica, 202
  $(X, \mathcal{G})$-, 195, 197, 227

Títulos Publicados — 33º Colóquio Brasileiro de Matemática

Geometria Lipschitz das singularidades – *Lev Birbrair e Edvalter Sena*

Combinatória – *Fábio Botler, Maurício Collares, Taísa Martins, Walner Mendonça, Rob Morris e Guilherme Mota*

Códigos geométricos, uma introdução via corpos de funções algébricas – *Gilberto Brito de Almeida Filho e Saeed Tafazolian*

Topologia e geometria de 3-variedades, uma agradável introdução – *André Salles de Carvalho e Rafał Marian Siejakowski*

Ciência de dados: algoritmos e aplicações – *Luerbio Faria, Fabiano de Souza Oliveira, Paulo Eustáquio Duarte Pinto e Jayme Luiz Szwarcfiter*

Discovering Poncelet invariants in the plane – *Ronaldo A. Garcia e Dan S. Reznik*

Introdução à geometria e topologia dos sistemas dinâmicos em superfícies e além – *Víctor León e Bruno Scárdua*

Equações diferenciais e modelos epidemiológicos – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

Differential Equation Models in Epidemiology – *Marlon M. López-Flores, Dan Marchesin, Vítor Matos e Stephen Schecter*

A friendly invitation to Fourier analysis on polytopes – *Sinai Robins*

PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria – *Rafael Bezerra dos Santos e Ana Cristina Vieira*

First steps into Model Order Reduction – *Alessandro Alla*

The Einstein Constraint Equations – *Rodrigo Avalos e Jorge H. Lira*

Dynamics of Circle Mappings – *Edson de Faria e Pablo Guarino*

Statistical model selection for stochastic systems with applications to Bioinformatics, Linguistics and Neurobiology – *Antonio Galves, Florencia Leonardi e Guilherme Ost*

Transfer operators in Hyperbolic Dynamics - an introduction – *Mark F. Demers, Niloofar Kiamari e Carlangelo Liverani*

A course in Hodge Theory: Periods of Algebraic Cycles – *Hossein Movasati e Roberto Villaflor Loyola*

A dynamical system approach for Lane-Emden type problems – *Liliane Maia, Gabrielle Nornberg e Filomena Pacella*

Visualizing Thurston's geometries – *Tiago Novello, Vinícius da Silva e Luiz Velho*

Scaling problems, algorithms and applications to Computer Science and Statistics – *Rafael Oliveira e Akshay Ramachandran*

An introduction to Characteristic Classes – *Jean-Paul Brasselet*

impa

Instituto de
Matemática
Pura e Aplicada

ISBN 978-65-89124-51-1